IFToMM D-A-CH Conference 2015

Dortmund 11. März 2015

TAGUNGSBAND

THEMEN

- Biomechanische Systeme
- Kinematische Analyse und Synthese
- Getriebetechnik
- Regelung von Mechanismen und Maschinen
- Mikromechanische Systeme
- Mehrkörpersysteme
- Sicherheit und Zuverlässigkeit
- Robotik und Mechatronik
- Rotordynamik
- Nachhaltigkeit, Ressourcen- und Energieeffizienz
- Fahrzeug- und Transportsysteme
- Tribologie
- Schwingungstechnik und Maschinendynamik
- Nachgiebige Mechanismen

Veranstalter:

Tobias Bruckmann, Uni Duisburg-Essen
Francisco Geu, Uni Duisburg-Essen
Mathias Hüsing, RWTH Aachen
Jörn Malzahn, IIT Genova
Jürg Schiffmann, EPFL

Torsten Bertram, TU Dortmund
Hannes Bleuler, EPFL
Burkhard Corves, RWTH Aachen
Manfred Husty, Uni Innsbruck
Andrés Kecskeméthy, Uni Duisburg-Essen

Organisiert durch
IFToMM Member Organizations
Austria, Germany, Switzerland

Durchgeführt durch
Technische Universität Dortmund

First IFToMM D-A-CH Conference 2015

11. März 2015, TU Dortmund

Organisation

General Chair:	Jörn Malzahn, TU Dortmund & Istituto Italiano di Tecnologia
Program Chairs:	Tobias Bruckmann, Universität Duisburg-Essen Francisco Geu, Universität Duisburg-Essen Mathias Hüsing, RWTH Aachen Jörn Malzahn, TU Dortmund & Istituto Italiano di Tecnologia Jürg Schiffmann, École polytechnique fédérale de Lausanne Torsten Bertram, TU Dortmund Hannes Bleuler, École polytechnique fédérale de Lausanne Burkhard Corves, RWTH Aachen Manfred Husty, Universität Innsbruck Andrés Kecskeméthy, Universität Duisburg-Essen
Publications Chair:	Tobias Bruckmann, Universität Duisburg-Essen
Publicity Chair:	Mathias Hüsing, RWTH Aachen

Impressum

Herausgeber:

Universität Duisburg-Essen
ISBN 978-3-940402-03-5

Erscheinungsort

DuEPublico, Duisburg-Essen Publications Online
Universität Duisburg-Essen
http://duepublico.uni-duisburg-essen.de/

© 2015

Geleitwort

Liebe Konferenzteilnehmer und -teilnehmerinnen,

dies ist die erste Konferenz der deutschen IFToMM Mitgliedsorganisationen Deutschland, Österreich und Schweiz, und es ist eine große Freude zu sehen, welchen enormen Zuspruch diese Initiative gefunden hat.

IFToMM – The International Federation for the Promotion of Mechanism and Machine Science – wurde am September 27, 1969 in Zakopane mit dem Ziel geboren, die internationale Zusammenarbeit auf dem Gebiet der Maschinen und Mechanismen und daran angrenzenden Gebieten zu fördern. Dies ist über die letzten viereinhalb Jahrzehnten beeindruckend gelungen: aus den damals 18 Gründerstaaten ist heute eine weltweit bedeutende Organisation mit 48 Mitgliedsländern von „A“ wie Armenien bis „V“ wie Vietnam gewachsen.

Die deutschsprachigen Länder haben auf diesem Gebiet immer eine große Rolle gespielt, mit vielen historisch führenden Persönlichkeiten aus Österreich, der Schweiz und Deutschland und einer traditionell starken Aktivität bei den alle vier Jahre stattfindenden Weltkongressen – in diesem Jahr in Taipei mit 30 Beiträgen aus den D-A-CH-Ländern die viertgrößte Anzahl nach China (158), Taipei, Taiwan (124) und Japan (32). Einer der Gründer von IFToMM, Prof. Erskine Crossley, der auch der erste Editor-In-Chief der für dieses Gebiet in 1966 geborenen Zeitschrift Journal of Mechanisms (heute Mechanism and Machine Theory) war, und für wen dieses Jahr während des Weltkongresses in Taipei sein 100er Geburtstag feierlich begangen wird, verbrachte an der Technischen Universität München in 1962–1963 ein Fulbright-Stipendium, aus dem unmittelbar danach, 1963, der Vorläufer von IFToMM, das Advanced Science Seminar in Mechanisms, entstand.

Die vorliegende D-A-CH-Konferenz hat zum Ziel, einerseits insbesondere junge Forscherinnen und Forscher im deutschsprachigen Raum auf den vielfältigen Gebieten der IFToMM aufmerksam zu machen und ihnen damit Gelegenheit zu geben, die eigenen spannenden Forschungsthemen untereinander auszutauschen, andererseits die Sichtbarkeit der deutschsprachigen IFToMM-Aktivitäten zu stärken, um so neue Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler für die faszinierenden, zukunftsweisenden Themen der IFToMM-Forschung zu gewinnen.

Wir wünschen allen Teilnehmerinnen und Teilnehmer einen fruchtbaren IFToMM-D-A-CH-Tag mit vielen anregenden wissenschaftlichen Gesprächen, neuen persönlichen Kontakten, und vielleicht auch dem Beginn lebenslanger Freundschaften aus dem Kennenlernen ähnlich gesinnter, neugieriger Geister.

Für die drei D-A-CH-Mitgliedsorganisationen

Andrés Kecskeméthy (D)

Manfred Husty (A)

Hannes Bleuer (CH)

IFToMM D-A-CH
Conference 2015

Programm

8:30 Uhr - 9:00 Uhr: Registrierung

9:00 Uhr - 9:15 Uhr: Begrüßung

Jörn Malzahn, Andrés Kecskeméthy, Hannes Bleuler

9:15 Uhr - 10:00 Uhr: Eröffnungsvortrag:

IFToMM ?!!
Herr Manfred Husty

10:00 Uhr - 10:40 Uhr: Vortragssitzung

Sitzungsleitung: Torsten Bertram

10:00 Uhr **Lars Hartmann, René Reich, Ulf Kletzin, Lena Zentner:**
Untersuchung eines dilatanten Polymers bei stoßartigen Belastungen

10:20 Uhr **Roy Lichtenheldt:**
Hammering beneath the Surface of Mars - Analyse des Schlagzyklus und der äußeren Form des HP3-Mole mit Hilfe der Diskrete Elemente Methode

10:40 Uhr – 11:00 Uhr: Kaffeepause

11:00 Uhr - 12:20 Uhr: Vortragssitzung

Sitzungsleitung: Hannes Bleuler

11:00 Uhr **Simon Bäuerle, Felix Boy, Alexander Fidlin:**
Einfluss der Ausgasung aufs Kupplungsfading bei Berganfahrt

11:20 Uhr **Martin Missong, Philipp Ingenlath, Sami Charaf Eddine, Burkhard Corves:**
Analyse und Bewertung verschiedener Fahrradhinterbau-kinematiken gefederter Fahrräder

11:40 Uhr **Lena Zentner, Mirna Issa, Stefan Griebel, Clemens Wystup, Silke Hügl, Thomas S. Rau, Omid Majdani:**
Nachgiebiger fluidisch aktuierter Elektrodenträger für Cochlea-Implantate

12:00 Uhr **Christoph Krimpmann, Torsten Bertram, Georg Schoppel, Ingo Glowatzky:**
Vergleich nichtlinearer Schaltfunktionen für Gleitzustandsregler am Beispiel hydraulischer Wegeventile

12:20 Uhr - 13:20 Uhr: Mittagspause

13:20 Uhr - 14:40 Uhr: Vortragssitzung

Sitzungsleitung: Andrés Kecskeméthy

13:20 Uhr **Stefan Kurtenbach, Fritz Ehreiser, Mathias Hüsing, Burkhard Corves:**
Abrollendes Kontaktelement als Endeffektor eines ebenen rekonfigurierbaren Manipulators mit drei Freiheitsgraden

13:40 Uhr **Christopher Reichert, Tobias Bruckmann, Ulrich Unterberg:**
Energie-optimale Trajektorien für seilbasierte Manipulatoren unter Verwendung von passiven Elementen

14:00 Uhr **Arthur Angerer:**
Analyse und Verbesserung der Echtzeitfähigkeit des Husty-Pfurner inverse Kinematik Algorithmus für allgemeine 6R Manipulatoren

14:20 Uhr **René Bartkowiak, Christoph Woernle:**
Geometrisch basierte Pseudoinverse und reziproke Schrauben der Jacobimatrix von 4H Mechanismen

14:40 Uhr - 15:00 Uhr: Kaffeepause

15:00 Uhr - 16:20 Uhr: Vortragssitzung

Sitzungsleitung: Burkhard Corves

15:00 Uhr **Kassim Abdul-Sater, Franz Irlinger, Tim C. Lueth:**
Ein Ansatz zur Kinematischen Mehrposen- / Mehrkörpersynthese

15:20 Uhr **Florian Simroth, Huafeng Ding, Andrés Kecskeméthy:**
Detecting rigid substructures in spatial nucleationfree spherical-spherical bar mechanisms based on kinematical loops

15:40 Uhr **Bastian Pfau, Markus Rieken, Richard Markert:**
Numerische Untersuchungen eines verstellbaren Gleitlagers zur Unterdrückung von Instabilitäten mittels Parameter-Antiresonanz

16:00 Uhr **Sebastian Linß, Ronald Opfermann, Philipp Gräser, René Theska, Lena Zentner:**
Nachgiebige Koppelmechanismen mit optimierten Festkörpergelenken für Präzisionsanwendungen

16:20 Uhr - 16:40 Uhr: Runder Tisch IFToMM D-A-CH Tobias Bruckmann

16:40 Uhr - 17:00 Uhr: Verabschiedung Mathias Hüsing

19:30 Uhr: Get Together (Achtung: geänderter Veranstaltungsort)

In der Hövels Hausbrauerei, Hoher Wall 5-7, 44137 Dortmund, http://www.hoevels-hausbrauerei.de
(Die Teilnahme ist bei der Anmeldung verbindlich mitzuteilen)

Beiträge

Lars Hartmann, René Reich, Ulf Kletzin, Lena Zentner…….. Seite 7
Untersuchung eines dilatanten Polymers bei stoßartigen Belastungen
http://dx.doi.org/10.17185/duepublico/37254

Roy Lichtenheldt …… Seite 14
Hammering beneath the Surface of Mars - Analyse des Schlagzyklus und der äußeren Form des HP3-Mole mit Hilfe der Diskrete Elemente Methode
http://dx.doi.org/10.17185/duepublico/37255

Martin Missong, Philipp Ingenlath, Sami Charaf Eddine, Burkhard Corves ……..Seite 22
Analyse und Bewertung verschiedener Fahrradhinterbau-kinematiken gefederter Fahrräder
http://dx.doi.org/10.17185/duepublico/37257

Lena Zentner, Mirna Issa, Stefan Griebel, Clemens Wystup, Silke Hügl, Thomas S. Rau, Omid Majdani …….. Seite 24
Nachgiebiger fluidisch aktuierter Elektrodenträger für Cochlea-Implantate
http://dx.doi.org/10.17185/duepublico/37258

Christoph Krimpmann, Torsten Bertram, Georg Schoppel, Ingo Glowatzky ……..Seite 31
Vergleich nichtlinearer Schaltfunktionen für Gleitzustandsregler am Beispiel hydraulischer Wegeventile
http://dx.doi.org/10.17185/duepublico/37259

Stefan Kurtenbach, Fritz Ehreiser, Mathias Hüsing, Burkhard Corves ……. ……..Seite 38
Abrollendes Kontaktelement als Endeffektor eines ebenen rekonfigurierbaren Manipulators mit drei Freiheitsgraden
http://dx.doi.org/10.17185/duepublico/37260

Christopher Reichert, Ulrich Unterberg, Tobias Bruckmann ……Seite 43
Energie-optimale Trajektorien für seilbasierte Manipulatoren unter Verwendung von passiven Elementen
http://dx.doi.org/10.17185/duepublico/37261

Arthur Angerer …… Seite 53
Analyse und Verbesserung der Echtzeitfähigkeit des Husty-Pfurner inverse Kinematik Algorithmus für allgemeine 6R Manipulatoren
http://dx.doi.org/10.17185/duepublico/37262

René Bartkowiak, Christoph Woernle …….. Seite 59
Geometrisch basierte Pseudoinverse und reziproke Schrauben der Jacobimatrix von 4H Mechanismen
http://dx.doi.org/10.17185/duepublico/37263

Kassim Abdul-Sater, Franz Irlinger, Tim C. Lueth ……Seite 61
Ein Ansatz zur Kinematischen Mehrposen- / Mehrkörpersynthese
http://dx.doi.org/10.17185/duepublico/37264

Florian Simroth, Huafeng Ding, Andrés Kecskeméthy …… Seite 68
Detecting rigid substructures in spatial nucleationfree spherical-spherical bar mechanisms based on kinematical loops
http://dx.doi.org/10.17185/duepublico/37265

Bastian Pfau, Markus Rieken, Richard Markert ……..…. Seite 70
Numerische Untersuchungen eines verstellbaren Gleitlagers zur Unterdrückung von Instabilitäten mittels Parameter-Antiresonanz
http://dx.doi.org/10.17185/duepublico/37266

Sebastian Linß, Ronald Opfermann, Philipp Gräser, René Theska, Lena Zentner ……...Seite 79
Nachgiebige Koppelmechanismen mit optimierten Festkörpergelenken für Präzisionsanwendungen
http://dx.doi.org/10.17185/duepublico/37267

Untersuchung eines dilatanten Polymers bei stoßartigen Belastungen
Investigation into an impact-loaded dilatant polymer

Lars Hartmann*, René Reich#, Ulf Kletzin#, Lena Zentner*
TU Ilmenau, Fakultät für Maschinenbau, 98693 Ilmenau, Deutschland,
* Fachgebiet Mechanismentechnik: lars.hartmann@tu-ilmenau.de, lena.zentner@tu-ilmenau.de
# Fachgebiet Maschinenelemente: rene.reich@tu-ilmenau.de, ulf.kletzin@tu-ilmenau.de

Kurzfassung

Neben mechatronischen Systemen gewinnt der Einsatz von funktionellen Materialien zur Reduzierung störender dynamischer Erscheinungen aus Gründen der Energieeffizienz mehr an Bedeutung. Wenn dazu dilatante (scherverfestigende) Polymere eingesetzt werden, ist die Charakterisierung und wertmäßige Identifizierung von Materialeigenschaften eine grundlegende Aufgabe. Durch einen an genormte Versuche angelehnten Kugelfallversuch werden Messdaten (Kraft, Bewegungskoordinate) zur modellbasierten Kennwertidentifizierung des Polymers bei stoßartiger Belastung für verschiedene Geschwindigkeiten erfasst. Die Anwendung eines linearen, zweiparametrischen Feder-Dämpfer-Modelles ermöglicht schließlich die Identifizierung eines Steifigkeits- und eines Dämpfungskennwert für das untersuchte dilatante Polymer bei stoßartiger Verformungsbeanspruchung. Eine Folge von modellbasierten Kennwerten für verschiedene Geschwindigkeiten verdeutlicht die Geschwindigkeitsunabhängigkeit von Steifigkeit und Dämpfung im untersuchten Bereich.

Abstract

Due to their special properties, dilatant polymers are more and more in focus of technical application to reduce undesirable dynamic effects like impacts. Only qualitative characterization and identification of values of the material properties allow the usage of the dilatant polymers as a functional material. To identify model-based values for impact loads, applied by a falling ball on the dilatant polymer, from experimental data the force and motion of the ball in one direction is measured. Using a linear, two-parametrical spring-damper-model yields elasticity and damping parameter for impact-loaded deflection. The values of these parameters illustrate an independence of the velocity in the investigated range.

1 Einleitung

Dynamische Erscheinungen sind in vielen Bereichen der Technik, besonders im Maschinenwesen und in der Fahrzeugtechnik, zu verzeichen und werden entweder als konstruktives Wirkprinzip von Maschinen, z. B. Schwingförderer, Hämmer, Rüttler, genutzt oder sind als parasitäre Schwingungen, Stoß- und Prelleffekte unerwünscht [1]. Zur Reduzierung störender dynamischer Erscheinungen werden neben passiven Feder-Dämpfer-Anordnungen, bestehend aus klassischen Metallfedern und viskosen Dämpfern, zunehmend aktive mechatronische Feder-Dämpfer-Systeme mit Steuerung und Regelung eingesetzt, um besondere Charakteristiken zu realisieren. Für spezielle Anforderungen und hohe Flexibilität werden in den mechatronischen Systemen Materialien eingesetzt, deren Eigenschaften durch eine äußere Energiezufuhr gezielt verändert werden können. Diese oft als *smart materials* bezeichneten Werkstoffe (z. B. magnetorheologische Stoffe) weisen teils systeminhärente Akor- und Sensorfunktionen auf und tragen zu einer sehr breiten Anwendbarkeit und einer Effizienzsteigerung technischer Systeme bei. Energieeffiziente und konstruktiv einfach aufgebaute Systeme, d. h. ohne Steuerungs- und Regelungsaufwand, können mit speziellen Materialien, die in Abhängigkeit bestimmter Parameter (Umgebungsbedingungen) ihre Eigenschaften ohne Zufuhr zusätzlicher Energie verändern, realisiert werden. Materialien, die zur Funktionserfüllung bzw. zur Veränderung der Eigenschaften keine zusätzlich von außen in das System eingebrachte Hilfsenergie erfordern, können als funktionelle Materialen (siehe **Bild 1**) bezeichnet werden [2,3].

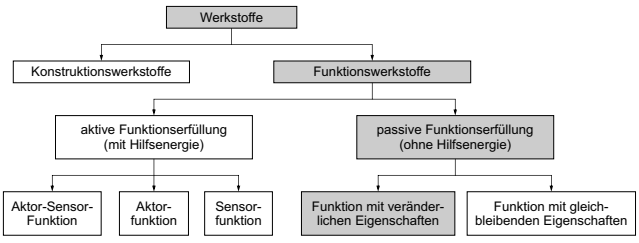


Bild 1: Klassifizierung von Werkstoffen [3]

Durch den Einsatz von viskoelastischen Polymeren mit schergeschwindigkeitsabhängigen Steifigkeits- und Dämpfungseigenschaften kann ein nichtlineares Feder-Dämpfer-Verhalten, z. B. für Anwendungen in der Präzisionstechnik, energieeffizient realisiert werden [3]. Zur Stoffgruppe derartiger Materialien zählen dilatante und strukturviskose Stoffe, die in Abhängigkeit von der einwirkenden Geschwindigkeit ausgeprägte dämpfende oder federnde Eigenschaften zeigen. Dieser Beitrag beschränkt sich auf die Untersuchung eines dilatanten, d. h. scherverfestigenden Polymers, das je nach Belastungsgeschwindigkeit unter-

schiedliche Merkmale bzw. verändertes Stoffverhalten aufweist. Unter dem Einfluss der Schwerkraft zerfließt eine Probe des dilatanten Materials bis nach sehr langer Beobachtungszeit ein flaches Gebilde entstanden ist. Das Material kann in diesem Zustand als eine hochviskose Flüssigkeit charakterisiert werden. Bei niedrigen Belastungsgeschwindigkeiten kann die Probe wie Knetmasse plastisch verformt werden, wobei mit zunehmender Geschwindigkeit die zur Verformung erforderliche Kraft anwächst. Für hohe Belastungsgeschwindigkeiten wird das Material zunehmend elastisch und ist nicht mehr als Flüssigkeit, sondern als Festkörper zu interpretieren. Je nach Belastungsgeschwindigkeit wirkt das Material dämpfend wie eine hochviskose Flüssigkeit oder weist eine Elastizität wie ein Festkörper auf. Damit eignen sich diese Stoffe in besonderem Maße zur Stoß- und Aufpralldämpfung und werden bereits in Protektoren und Schutzbekleidung eingesetzt [2]. Für die technische Anwendung dilatanter Polymere bei der Reduzierung störender dynamischer Effekte an Maschinen und Geräten und insbesondere für die Auslegung von Systemen bzw. Systemkomponenten sind Materialkennwerte für Steifigkeit und Dämpfung des dilatanten Polymers erforderlich. In diesem Beitrag sollen aus experimentellen Messwerten modellbasierte Steifigkeits- und Dämpfungskennwerte eines dilatanten Polymers für stoßartige Belastungen bei gleichbleibender Temperatur bestimmt werden, um für technische Anwendungen Bauelemente auf Basis des funktionellen Materials dimensionieren zu können.

2 Experiment und Messergebnisse

Die Zielsetzung dieses Beitrages ist eng mit der Materialtheorie, die den stofflichen Zusammenhang (Stoffgesetz) materieller Körper in idealisierter Form modelliert, verbunden [4]. Eine Ableitung von Merkmalen und Eigenschaften erfolgt dabei stets anhand von phänomenologischen Beobachtungen und experimentellen Daten, so dass für eine Ermittlung der Materialkennwerte, die Steifigkeit und Dämpfung repräsentieren, Messdaten gewonnen werden müssen. Für die statische und dynamische Prüfung von Elastomeren, Kautschuken und Kunststoffen sind im Normenwerk zahlreiche Versuche und Versuchsanordnungen aufgeführt. Das untersuchte dilatante Material kann aufgrund der stark von der Belastungsgeschwindigkeit abhängigen Eigenschaften nicht als viskoelastisches Elastomer im klassischen Sinne betrachtet werden und somit können Versuche aus dem Normenwerk nicht oder nur in abgewandelter Form durchgeführt werden. Zur Bestimmung des grundlegenden stofflichen Zusammenhangs linear viskoelastischer Stoffe sind in [5] Versuche mit einfachen Beanspruchungsverläufen, sog. Grundversuche, vorgegeben. Für Grundversuche mit impulsartiger Beanspruchung (verkörpert durch einen Einheitsstoß $\delta(t)$) kann entweder ein Spannungsstoß mit einem endlichen Wert oder eine impulsartige Verformungsbeanspruchung, bei der die Verformung einen endlichen Wert annimmt, vorgegeben werden. Bei der Durchführung des jeweiligen Versuches werden die zugehörigen Grundfunktionen, Verformungsverlauf für Spannungsstoß bzw. Spannungsverlauf für impulsartige Verformungsbeanspruchung, erfasst. Die Grundfunktionen für die impulsartige Beanspruchung lassen sich zueinander in Beziehung setzen und charakterisieren das untersuchte Material. Zur Beurteilung des Elastizitätsverhaltens von Elastomeren bei Stoßbeanspruchung und zur Charakterisierung des dynamischen Verhaltens ist in [6] die *Bestimmung der Rückprall-Elastizität* mit dem Schob-Pendel beschrieben. Die Versuchsanordnung des Schob-Pendels ist aber wegen der besonderen Materialeigenschaften nicht zu bevorzugen. In [7] wird eine Versuchsanordnung zur Bestimmung der Kugel-Rückprallelastizität beschrieben, die für das dilatante Material besser geeignet ist. An dieser Stelle sei darauf verwiesen, dass die durchgeführte und im Folgenden beschriebene Prüfung den Anforderungen des Normenwerkes nicht gerecht werden kann und insbesonders keine ideale impulsartige Beanspruchung darstellt. Ein ähnlicher Veruch zur Unteruchung von Silly Putty ist in [8] beschrieben.

2.1 Versuchsaufbau und Versuchsdurchführung

Zur Ermittlung von erforderlichen Messdaten wurde in Anlehnung an den Grundversuch mit impulsartiger Verformungsbeanspruchung ($\dot{x}(t) = v_0\delta(t)$) [5] und die Rückprallelastizitätsversuche [6, 7] ein geeigneter Versuchsaufbau, der im **Bild 2** dargestellt ist, konzipiert. Ein Elektromagnet, der bei elektrischer Durchflutung eine Stahlkugel mit einer Masse von 32 g hält, ist höhenverstellbar über einer Probe des dilatanten Polymers angebracht. Die Probe des dilatanten Polymers hat ein hinreichend großes Volumen, damit Grenzschichteffekte bei der Messung klein gehalten werden. Durch Öffnen eines Schalters zu einem Zeitpunkt $t = -T$ wird der Stromfluss unterbrochen und die Stahlkugel fällt im freien Fall nach unten.

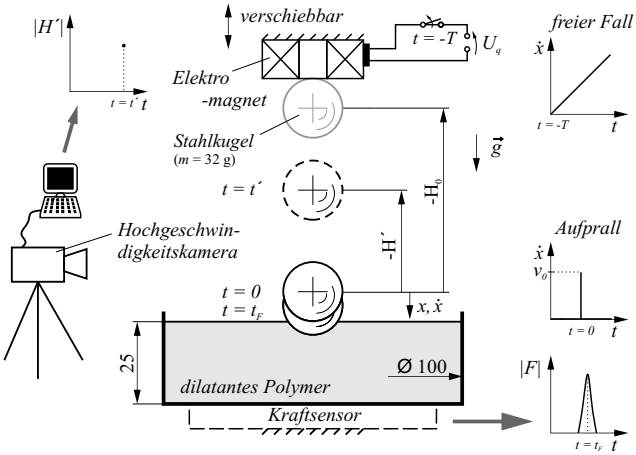


Bild 2: Versuchsanordnung des Kugelfallversuches zur Bestimmung der Kugel-Rückprallelastizität und Messung des Kraft-Zeit-Signales

Aus der vorgegebenen Fallhöhe H_0 kann die Geschwindigkeit v_0 mit der die Probe in diesem Versuch stoßartig belastet wird, berechnet werden. Eine Variation der Fallhöhe H_0 zwischen 5 mm und 40 mm verändert die Auftreffgeschwindigkeit v_0 der Kugel auf die Probe im Bereich von

0,313 m/s und 0,886 m/s gemäß den kinematischen Gesetzen für den freien Fall. Die Auftreffenergie entpricht je nach Fallhöhe zwischen 1,57 mJ und 12,56 mJ. Für vier vorgegebene Fallhöhen H_0^* (5 mm, 10 mm, 20 mm, 40 mm) werden jeweils fünf Messungen durchgeführt. Trifft die Stahlkugel zum Zeitpunkt $t = 0$ mit der Geschwindigkeit v_0 auf die Probe auf (stoßartige Belastung), beginnt die Wirkung des dilatanten Materials. Die kinetische Energie der Stahlkugel wird bei Verformung von dem dilatanten Material aufgenommen und die Kugel infolge dessen bis zum Stillstand abgebremst. Alle im Material ablaufenden physikalischen und chemischen Prozesse sind nicht Gegenstand dieser Ausarbeitung und werden nicht betrachtet. Ein Teil dieser aufgenommenen Energie wird an die Kugel zurückgegeben, wenn das Material wieder in die ursprüngliche Form zurückkehrt. Der Energieanteil, der nicht an die Kugel zurückgegeben wird, wird dissipiert und im Material in Wärme umgewandelt. Derjenige Teil der Energie, der in mechanische Energie zurückgewandelt wird, beschleunigt die Kugel, so dass diese zum Zeitpunkt $t = t'$ in eine bestimmte Höhe, die Rückprallhöhe H', zurückgeworfen wird. Um die Rückprallhöhe H' erfassen zu können, wird der hochdynamische Vorgang des Versuches mit einer Hochgeschwindigkeitskamera aufgenommen und mithilfe einer Bildverarbeitungssoftware ausgewertet. Der Kugeldurchmesser ($D = 10$ mm) dient dabei als Referenz, um Fallhöhe und Rückprallhöhe messtechnisch zu bestimmen. Aus dem Verhältnis dieser beiden Höhen kann eine Rückprallelastizität R^* bestimmt werden, die nicht der Rückprallelastizität des Normenwerkes [6,7] zu verwechseln ist. Neben der Rückprallelastizität ist für die modellbasierte Versuchsauswertung eine weitere Messgröße erorderlich. Eine leicht zugängliche Größe ist die Kraft, die von der auftreffenden Kugel durch das Material in das Fundament übertragen wird. Über die gesamte Dauer einer Messung wird dazu dieses Kraft-Zeit-Signal mithilfe eines Kraftsensors erfasst.

2.2 Messergebnisse

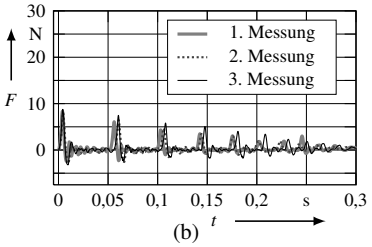
Die Fall- und die Rückprallhöhe wurden durch Bildverarbeitung aus den Videosequenzen für die insgesamt 20 Messungen ermittelt. In den Abbildungen (a), (c), (e) und (g) in der **Tabelle 1** ist exemplarisch für eine Messung je vorgegebene Fallhöhe die Bildauswertung dargestellt. Die Umrisse der im Bild detektierten Kreise sind farblich hervorgehoben und repräsentieren die Lagen der Stahlkugel während des Versuches, die dem Schema im Bild 2 entsprechen. Als Fehlereinflüsse sind die Querabweichung der Kugel zur Seite, die sehr klein gegenüber der Vertikalauslenkung ist, die Querabweichung der Kugel in die Tiefe sowie Rotation der Kugel zu nennen. Für jede vorgegebene Fallhöhe H_0^* sind in der Tabelle 1 zusätzlich die Mittelwerte $\bar{H}_0$, $\bar{H}'$ der ermittelten Fallhöhen H_0 und der Rückprallhöhen H' angegeben. Das Kraft-Zeit-Signal des Kraftsensors, das die in das Fundament eingeleitete Kraft widergibt, ist neben den Vertikalauslenkungen für die vorgegebenen Fallhöhen in den Diagrammen (b), (d), (f) und (h) der Tabelle 1 dargestellt, wobei aus Gründen einer übersichtlichen Darstellung nur drei der fünf Signale abgebildet sind. Auf ein erstes Maximum, das durch den Aufprall der Stahlkugel mit der Geschwindigkeit v_0 entsteht, folgt Rauschen des Kraftsensors bis weitere Kollisionen der Stahlkugel mit dem dilatanten Polymer detektiert werden.

Tabelle 1: Bildauswertung einer Videosequenz ((a), (c), (e) und (g)) und Kraft-Zeit-Verlauf von drei Messungen ((b), (d), (f) und (h)) je vorgegebener Fallhöhe H_0^*

Fallhöhe 5 mm

$|\bar{H}_0| = 5{,}46$ mm
$|\bar{H}'| = 3{,}4$ mm

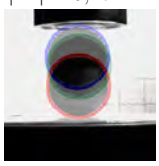
(a)



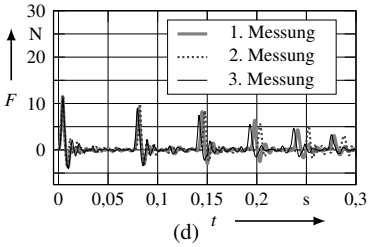
(b)

Fallhöhe 10 mm

$|\bar{H}_0| = 9{,}78$ mm
$|\bar{H}'| = 6{,}47$ mm



(c)

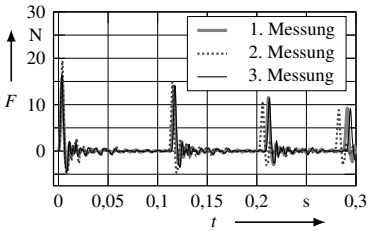


(d)

Fallhöhe 20 mm

$|\bar{H}_0| = 22{,}29$ mm
$|\bar{H}'| = 14{,}84$ mm

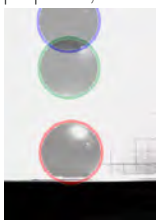
(e)



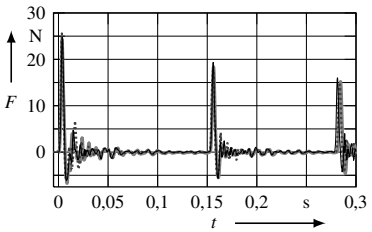
(f)

Fallhöhe 40 mm

$|\bar{H}_0| = 42{,}26$ mm
$|\bar{H}'| = 27{,}77$ mm



(g)



(h)

In den Diagrammen (b), (d), (f) und (h) der Tabelle 1 ist die Amplitude der Kraft und die Schwingungsdauer der Vertikalbewegung ersichtlich, die je Höhenstufe für die drei dargestellten Kraft-Zeit-Verläufe etwa gleich sind. Die Amplitude der Kraft als auch die Schwingungsdauer verringern sich mit jedem weiteren Aufprall, was auf eine entsprechende Energiedissipation infolge von Dämpfung schließen lässt. Mit vergrößerter Anfangsfallhöhe H_0^* steigt die Amplitude der Kraft als auch die Schwingungsdauer der

Vertikalbewegung an. Da die Fehlereinflüsse infolge der genannten Effekte von Aufprall zu Aufprall fortgepflanzt werden, ist für die weitere Betrachung nur das erste Maximum von Bedeutung. Im **Bild 3** ist die ermittelte Rückprallhöhe H' in Abhängigkeit von der ermittelten Fallhöhe H_0 und der daraus berechneten Auftreffgeschwindigkeit v_0 dargestellt.

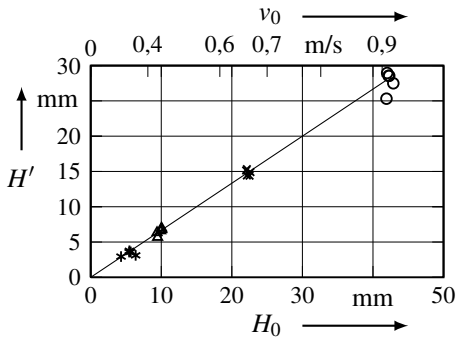


Bild 3: Rückprallhöhe H' in Abhängigkeit von der Fallhöhe H_0 sowie der Auftreffgeschwindigkeit v_0

Die fünf Messwerte für die vorgegebenen Fallhöhen H_0^* liegen dicht beieinander, obwohl eine Rotation der Stahlkugel sowie ihre nicht vermeidbare Querabweichung, infolge einer fehlenden Führung nach dem Aufprall, nicht berücksichtigt wurden. Mit guter Näherung kann zwischen der Rückprallhöhe und der Fallhöhe ein linearer und zwischen der Rückprallhöhe und der Auftreffgeschwindigkeit ein quadratischer Zusammenhang angenommen werden. Aus den ermittelten Höhen lässt sich die Rückprallelastizität R^* als das prozentuale Verhältnis der Rückprallhöhe bezogen auf die Fallhöhe ($R^* = H'/H_0\,100\%$) berechnen. Das **Bild 4** veranschaulicht die Abhängigkeit der Rückprallelastizität des dilatanten Polymers R^* gegenüber der Fallhöhe H_0 und der Auftreffgeschwindigkeit v_0.

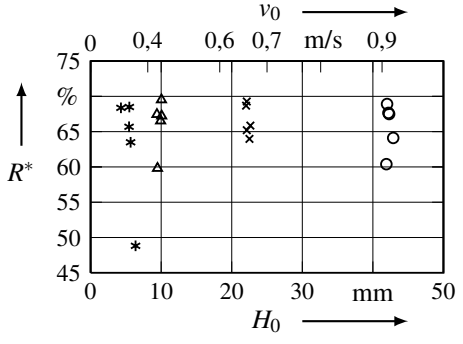


Bild 4: Rückprallelastizität R^* in Abhängigkeit von der Fallhöhe H_0 sowie der Auftreffgeschwindigkeit v_0

Da kein ausgeprägter Trend, sondern eine deutliche Streuung der Werte erkennbar ist, kann die Rückprallelastizität als konstant angesehen werden. Dieses Ergebnis ist besonders hervorzuheben, denn für das dilatante Material liegt die Erwartung in einer Zunahme der Rückprallhöhe mit zunehmender Auftreffgeschwindigkeit. Die Konstanz der Rückprallelastitzität lässt auf geschwindigkeitsunabhängige Steifigkeits- und Dämpfungseigenschaften schließen.

3 Modellbildung und Kennwertidentifizierung

3.1 Modellbildung

Die Identifizierung der Steifigkeits- und Dämpfungskennwerte des dilatanten Polymers aus den Messwerten der durchgeführten Versuche ist nur in Abhängigkeit eines Modells möglich. Mithilfe des Modells werden die Eingangs- und Ausgangsgrößen des Systems durch bestimmte Anzahl unabhängiger Parameter in Beziehung gesetzt. Sowohl Beobachtungen als auch die Messergebnisse zeigen, dass das dilatante Polymer für die stoßartige Belastung elastische als auch dämpfende Eigenschaften aufweist. Unter der Annahme eines linear viskoelastischen Materialverhaltens des dilatanten Polymers kann die Elastizität des Materials durch eine lineare Feder und die Dämpfung durch einen linearen geschwindigkeitsproportionalen Dämpfer modelliert werden. Ob die Feder und der Dämpfer hintereinander oder parallel angeordnet sind, muss anhand der gemessenen Größen bzw. Signale entschieden werden. Das Kraft-Zeit-Signal (vgl. Tabelle 1 (b), (d), (f), (h)) zeigt, dass die Kraft vor und nach der Belastung den gleichen Wert annimmt, so dass für die Modellierung nur die parallele Anordnung von Feder und Dämpfer geeignet ist. Aus dieser Vorüberlegung kann ein Massepunktmodell entwickelt werden, das im **Bild 5** dargestellt ist.

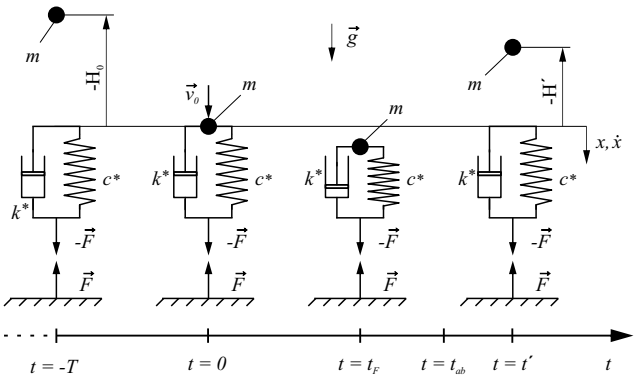


Bild 5: Lineares Modell zur Identifizierung der Steifigkeits- und Dämpfungskennwerte des dilatanten Polymers aus den Messwerten der durchgeführten Versuche

Da während der Bewegung des Massepunktes der Kontakt zwischen dem Massepunkt und der parallelen Anordnung aus Feder und Dämpfer geschlossen und geöffnet wird, muss die Bewegung abschnittsweise betrachtet werden. Ein erster Abschnitt vom Zeitpunkt $t = -T$ bis zum Zeitpunkt $t = 0$ beschreibt den freien Fall des Massepunktes, wonach sich die Geschwindigkeit des Massepunktes aus der Fallhöhe H_0 wie folgt ermitteln lässt:

$$v_0 = \sqrt{2\,g\,|H_0|}. \tag{1}$$

Mit dieser Geschwindigkeit v_0 trifft der Massepunkt auf die Feder-Dämpfer-Schaltung auf und das Feder-Masse-Dämpfer-System wird vom Zeitpunkt $t = 0$ bis zum Ablösen $t = t_{ab}$ zu Schwingungen angeregt. Die Bewegung des

Massepunktes für die Schwingphase ($0 \le t \le t_{ab}$) wird mithilfe folgender Schwingungsdifferenzialgleichung berechnet:

$$m\ddot{x} = -c^* x - k^* \dot{x} - mg. \tag{2}$$

Unter Einbeziehung der Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = -v_0$ ergibt sich die Lösung $x(t)$ im Interval $0 \le t \le t_{ab}$ mit $\omega = \frac{\sqrt{4mc^* - k^{*2}}}{m}$:

$$x(t) = \frac{mg}{c^*} - \mathrm{e}^{\left(-\frac{k^* t}{2m}\right)} \left[\frac{mg}{c^*} \cos(\omega t) + \frac{m(gk^* + 2v_0 c^*)}{c^* \sqrt{4mc^* - k^{*2}}} \sin(\omega t) \right] \quad 0 \le t \le t_{ab}. \tag{3}$$

Aus $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ und mit den Parametern c^* und k^* ist die Kraft, die in das Fundament eingeleitet wird, als Funktion der Zeit berechenbar:

$$F(t) = c^* x(t) + k^* \dot{x}(t) \qquad 0 \le t \le t_{ab}. \tag{4}$$

Die größte Kraft wird zum Zeitpunkt t_F erreicht, wobei t_F mithilfe der zeitlichen Ableitung der Gleichung (4) bestimmt werden muss:

$$t_F = \frac{2m \arctan\left(\frac{\sqrt{4mc^* - k^{*2}} \left(c^* m v_0 - k^{*2} v_0 - g m k^*\right)}{3c^* m k^* v_0 + 2c^{*2} m^2 g - k^{*3} v_0 - k^{*2} g m} \right)}{\sqrt{4mc^* - k^{*2}}} \tag{5}$$

Zum Zeitpunkt $t = t_{ab}$ löst sich der Kontakt zwischen Massepunkt und dem Feder-Dämpfer-System ($F(t) = 0$) und der Massepunkt prallt mit der Geschwindigkeit v_{ab} zurück. Diese Geschwindigkeit v_{ab} wird durch Einsetzen des Terms für $t = t_{ab}$ in die zeitliche Ableitung der Gleichung (3) gewonnen. Die Rückprallhöhe H' ist die Steighöhe des Massepunktes zum Zeitpunkt $t = t'$ gemäß Gleichung (6), wobei der Massepunkt zu diesem Zeitpunkt keine Geschwindigkeit hat.

$$H' = -\frac{1}{2} g t'^2 + v_{ab} t'. \tag{6}$$

Für die modellbasierte Kennwertidentifizierung aus den gemessenen Kraft-Zeit-Verläufen, und den diskreten Werten für die Fallhöhen H_0 die Rückprallhöhen H' stehen explizite Gleichungen für den Kraft-Zeit-Verlauf $F(t)$ und die Bewegungskoordinate $x(t)$ zur Verfügung. Im **Bild 6** sind am Beispiel von $c^*_\mathrm{B} = 200\,\mathrm{N/m}$ und $k^*_\mathrm{B} = 0{,}5\,\mathrm{Ns/m}$ sowie $H_{0\mathrm{B}} = 50\,\mathrm{mm}$ die analytisch berechneten Ergebnisse dargestellt.

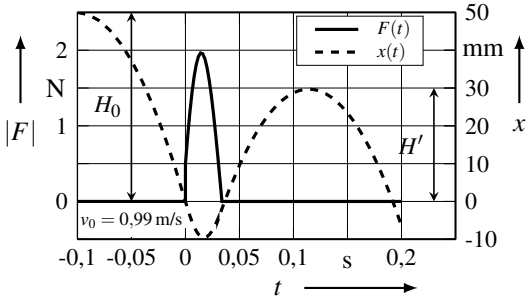


Bild 6: Analytisch berechneter Kraft-Zeit-Verlauf $F(t)$ und Bewegungskoordinate $x(t)$ am Beispiel c^*_B, k^*_B, $H_{0\mathrm{B}}$

3.2 Modellbasierte Kennwertidentifizierung

Die unbekannten Modellparameter für Steifigkeit und Dämpfung (c^*, k^*) können mithilfe der Gleichungen (3), (4), (6) auf verschiedene Weisen aus den Versuchsdaten ermittelt werden. Einen Überblick über diese Möglichkeiten und dabei aufgetretene Probleme gibt die **Tabelle 2**.

Tabelle 2: Möglichkeiten der Verarbeitung von Versuchsdaten zur modellbasierten Kennwertidentifizierung

Versuchsdaten zur Verarbeitung	*Anmerkung*
Kraftmessdaten als Curve Fit $F(t)$	Curve Fit zu fehlerbehaftet
Ausgewähltes Messdateninterval als Curve Fit $F(t)$ und eine diskrete Rückprallhöhe	Zeitintervalle von Messung und Modell unterschiedlich
Kraftmaximum, Fallhöhe und Rückprallhöhe (diskret)	nur diskrete Werte für $F_{\max}$, H_0, H'

Bedingt durch den Kraftsensor sind die Zeitsignale der gemessenen Kraft-Zeit-Verläufe fehlerbehaftet, womit die Kurvenform und die Intervalle dieser Verläufe nicht für die Kennwertbestimmung nutzbar sind. Unter den gegebenen Voraussetzungen werden die unbekannten Modellparameter für Steifigkeit und Dämpfung c^*, k^* für die einzelnen Messungen mithilfe der gemessenen Fallhöhe H_0, der gemessenen Rückprallhöhe H' und dem Maximum der ins Fundament eingeleiteten Kraft $F_{\max}$ bestimmt. Die Gleichungen für H' und $F_{\max}$ wurden soweit vereinfacht, dass neben den unbekannten Modellparametern für Steifigkeit und Dämpfung c^*, k^* nur Konstanten (Masse m, Erdbeschleunigung g) und die Messwerte H_0 und H' enthalten sind. Durch Lösung des Gleichungssystems (7) können aus dem Maximalwerten $F_{\max}$ und H' die Unbekannten für das Modell (Bild 5) c^* und k^* identifiziert werden.

$$\begin{aligned} F_{\max}(c^*, k^*) &= c^* x(t_F) + k^* \dot{x}(t_F) \\ H'(c^*, k^*) &= -\frac{1}{2} g t'^2 + v_{ab} t' \end{aligned} \tag{7}$$

In den **Bildern 7** und **8** sind die modellbasierten Kennwerte für die einzelnen Messungen ($i = 5$) dargestellt.

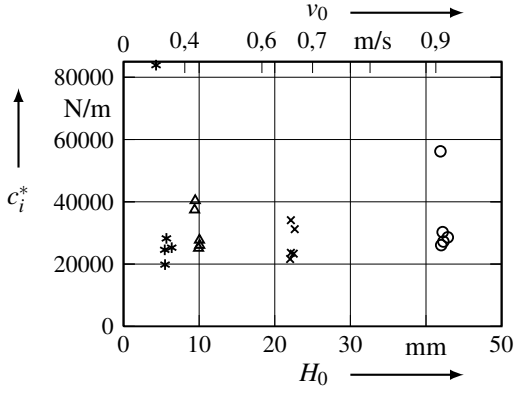


Bild 7: Steifigkeitskennwerte c^*_i in Abhängigkeit von der Fallhöhe H_0 sowie der Auftreffgeschwindigkeit v_0 für jeweils fünf Messungen ($i = 5$)

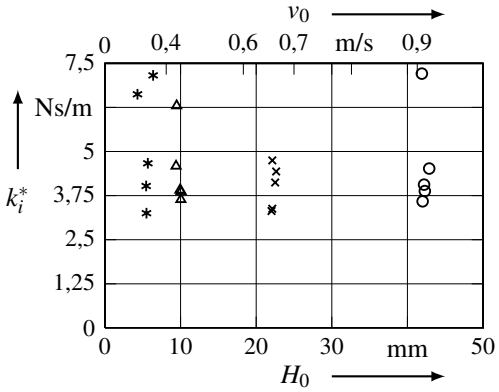


Bild 8: Dämpfungskennwerte k_i^* in Abhängigkeit von der Fallhöhe H_0 sowie der Auftreffgeschwindigkeit v_0 für jeweils fünf Messungen ($i = 5$)

Aufgrund der Streuung der identifizierten Werte c_i^* und k_i^* ist eine Aussage über deren Geschwindigkeitsabhängigkeit schwer möglich. Eine Bereinigung, d. h. eine Auswahl von Werten der einzelnen Messungen i kann nach unterschiedlichen Gesichtspunkten erfolgen.
Für die im **Bild 9** dargestellten Werte für Steifigkeit c^* und Dämpfung k^* wurde folgendes Auswahlkriterium zugrunde gelegt. Die Werte sind Mittelwerte aus den drei Einzelwerten, die jeweils für Steifigkeit und Dämpfung am nächsten beieinander liegen, d. h. die Wichtung der Parameterwertigkeit ist gleich. Das Bild 9 zeigt die Konstanz der Modellparameter für verschiedene Geschwindigkeiten deutlich und damit beweist sich eine Geschwindigkeitsunabhängigkeit im untersuchten Bereich. Nach dem zugrunde liegenden Modell kann für die Steifigkeit des untersuchten dilatanten Polymers ein Wert von etwa $c^* = 26000\,\mathrm{N/m}$ und für die Dämpfung ein Wert von ungefähr $k^* = 3{,}85\,\mathrm{Ns/m}$ identifiziert werden.

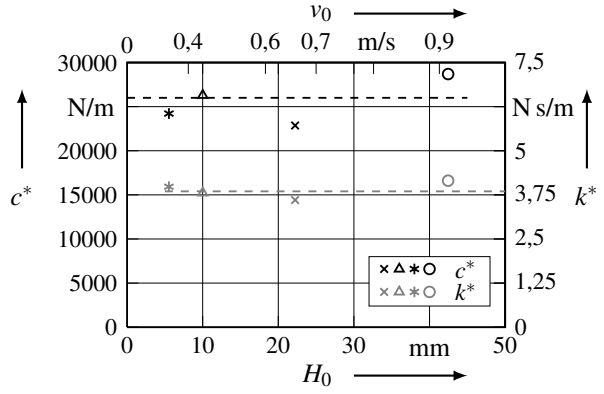


Bild 9: Gemittelte Kennwerte c^* und k^* in Abhängigkeit von der Fallhöhe H_0 sowie der Auftreffgeschwindigkeit v_0

4 Diskussion

Die Untersuchung des dilatanten Polymers mit funktionellen Eigenschaften basiert auf Experimenten, die für viskoelastische Stoffe im Normenwerk beschrieben sind. Da das dilatante Polymer als Funktionswerkstoff mit passiver Funktionserfüllung und veränderlichen Eigenschaften kein rein elastischer, viskoser oder plastischer Stoff und kein viskoelastischer Stoff im klassischen Sinn ist, sind vom Normenwerk abweichende Versuche erforderlich. Die besonderen funktionellen Eigenschaften des dilatanten Polymers, die phänomenologisch gut erfassbar sind, stellen jedoch hohe Anforderungen an die wertmäßige Untersuchung. Zur Charakterisierung und Identifizierung von Materialeigenschaften bei stoßartigen Belastungen reicht die Messung der Kugel-Rückprallelastizität allein nicht aus. Erst durch die Messung der, beim Kugelfallversuch in das Fundament eingeleiteten, Kraft in Kombination mit der Kugel-Rückprallelastizität ist eine Abschätzung von Materialkennwerten des dilatanten Polymers für diese Belastungsart möglich. Während die Versuchsdaten für das transiente Kraftsignal durch einen Kraftsensor erfasst werden, wird für die Rückprallelastizität eine optische Messmethode mit Bildauswertung realisiert. Trotz einer hohen zeitlichen Auflösung des hochdynamischen Vorganges der fallenden und zurückprallenden Kugel sind die Messdaten, vor allem der Kraft-Zeit-Verlauf, mit systematischen Messfehlern behaftet. Neben diesen systematischen Fehlern wirken zufällige, z. B. Rotation und Querabweichung der Kugel, und subjektive Messfehler, z. B. ungleichmäßiges Befüllen und Positionieren des Gefäßes, auf die Messgenauigkeit ein, wobei durch wiederholte Messungen ihr Einfluss reduziert werden kann.
Entscheidenden Anteil an der Identifizierung von Materialparametern aus den Messwerten hat das zugrunde liegende Modell. Angewendet wird ein lineares Feder-Dämpfer-System mit Steifigkeitsparameter c^* und Dämpfungsparameter k^* als zweiparametrisches Modell für das dilatante Polymer mit funktionellen Eigenschaften. Durch analytische Berechnungen der Bewegungskoordinate $x(t)$ der Punktmasse und der in das Fundament eingeleiteten Kraft $F(t)$ ist eine Identifizierung der Materialparameter c^* und k^* möglich. Dabei sind verschiedene Vorgehensweisen für die Verarbeitung der Messdaten im Modell denkbar. Obwohl für die ausgewählte Vorgehensweise nur diskrete Werte ($F_{\max}$, H_0, H') herangezogen wurden, liefert sie zuverlässige, modellbasierte Kennwerte für Steifigkeit und Dämpfung. Durch Mittelung der errechneten Einzelwerte wurde eine eindeutige Unabhängigkeit dieser Kennwerte von der Auftreffgeschwindigkeit (Belastungsgeschwindigkeit) im Bereich zwischen 0,313 m/s und 0,886 m/s gefunden. Dieses Ergebnis ist zunächst nicht mit den phänomenologischen Eigenschaften, wie der Plastizität bei geringen Belastungsgeschwindigkeiten und der wachsenden Elastizität bei Zunahme der Belastungsgeschwindigkeit, in Einklang zu bringen. Interpretierbar ist das Ergebnis aber durch das Erreichen eines stationären Materialzustandes mit konstanten Materialkennwerten ab einer bestimmten Belastungsgeschwindigkeit. Die Untersuchung des dilatanten Polymers bei stoßartigen Belastungen, die als stoßartige Verformungsbeanspruchung (fallende Kugel mit Auftreffgeschwindigkeit v_0) eingeprägt wurde, zeigt eine deutliche Unabhängigkeit der modellbasierten Materialparameter c^* und k^* für verschiedene Auftreffgeschwindigkeiten v_0.

5 Zusammenfassung

In diesem Beitrag ist eine Möglichkeit zur experimentellen Untersuchung und modellbasierten Materialkennwertidentifizierung für ein dilatantes Polymer bei stoßartigen Belastungen beschrieben. Das Ziel dieser modellbasierten Kennwertidentifizierung ist die Dimensionierung von Bauelementen, die durch Anwendung des dilatanten Polymers energieeffizient zur Schwingungsminimierung sowie zur Reduzierung von Stoßeffekten und anderer störender dynamischer Effekte in der Technik eingesetzt werden können. Die Grundlage der angewendeten induktiven Methode ist die experimentelle Untersuchung des Polymers für Stoßbelastungen. Durch die funktionelle Eigenschaft des dilatanten Polymers, war eine Anpassung bestehender Normversuche an spezielle Anforderungen des Untersuchungsgegenstandes notwendig. Ein Kugelfallversuch, der für das Polymer eine stoßartige (keine ideale impulsartige) Verformungsbeanspruchung darstellt, wurde für verschiedene Belastungsgeschwindigkeiten durchgeführt, um Messdaten für Rückprallhöhe und Kraft-Zeit-Verlauf zu ermitteln. Mithilfe eines linearen, zweiparametrischen Modelles wurden aus den Messdaten ein geschwindigkeitsunabhängiger Steifigkeitskennwert und ein geschwindigkeitsunabhängiger Dämpfungskennwert abgeleitet. Die Ergebnisse der Untersuchung des dilatanten Polymers bei einer stoßartigen Verformungsbeanspruchung zeigen eine deutliche Unabhängigkeit der modellbasierten Materialparameter für verschiedene Beanspruchungsgeschwindigkeiten. Weitere Arbeiten werden sich infolge dieses Ergebnisses mit der Untersuchung des dialtanten Polymers bei anderen Beanspruchungen und geringeren Beanspruchungsgeschwindigkeiten beschäftigen.

Die Autoren danken der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die finanzielle Unterstützung (ZE 714/6-1, KL 1044/3-1).

6 Literatur

[1] Dresig, H.; Holzweißig, F.: *Maschinendynamik*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2007.

[2] Hartmann, L.; Reich, R.; Kletzin, U.; Zentner, L. *Approaches on Material Analysis and Modeling of Bouncing Putty*. In: 58th Ilmenau Scientific Colloquium 2014. 08./12. September 2014 Ilmenau. URN: urn:nbn:de:gbv:ilm1-2014iwk-048:1.

[3] Hartmann, L.; Reich, R.; Kletzin, U.; Zentner, L. *Energieeffiziente nachgiebige Strukturen mit funktionellen Feder-Dämpfer-Eigenschaften*. Forschungsbericht, Technische Universität Ilmenau, 2014, unveröffentlicht.

[4] Haupt, P.: *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2002.

[5] N. N.: *Linear-viskoelastische Stoffe - Begriffe, Stoffgesetze, Grundfunktionen*. DIN 13343, Deutsches Institut für Normung, Berlin: Beuth Verlag, 1994.

[6] N. N.: *Bestimmung der Rückprallelastizität (Schob-Pendel)*. DIN 53512, Deutsches Institut für Normung, Berlin: Beuth Verlag, 2002.

[7] N. N.: *Weich-elastische polymere Schaumstoffe - Bestimmung der Kugel-Rückprallelastizität*. DIN EN ISO 53512, Deutsches Institut für Normung, Berlin: Beuth Verlag, 2008.

[8] Cross, R.: *Elastic and Viscous properties of Silly Putty*. American Journal of Physics, Vol. 80, No. 10. (2012), S. 870-875.

Hammering beneath the Surface of Mars

Analyse des Schlagzyklus und der äußeren Form des HP^3-Mole mit Hilfe der Diskrete Elemente Methode

Roy Lichtenheldt, M.Sc., Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V. (DLR), Institut für Systemdynamik und Regelungstechnik, 82234 Weßling, Deutschland, Roy.Lichtenheldt@dlr.de
und Technische Universität Ilmenau, Fakultät für Maschinenbau, Fachgebiet Mechanismentechnik

Kurzfassung

Die Marsmission „InSight“ (Interior Exploration using Seismic Investigations, Geodesy and Heat Transfer) der NASA hat das Ziel, Fragen zur Entstehung erdähnlicher Planeten zu beantworten. Dafür schlägt sich der HP^3-Mole tiefer unter die Oberfläche des Mars als je ein anderes Instrument zuvor. Der Vortrieb dieses „selbsteinschlagenden Nagels“ hängt dabei stark vom Ablauf des inneren Schlagzyklus, der äußeren Formgebung des Mechanismus und der Interaktion mit dem umgebenden Regolith ab. Nach erfolgreicher Verifikation und Validierung der DEM-MKS Co-Simulation mit Messdaten, wird nun der komplexe Schlagzyklus und die Interaktion mit dem Boden bei Variation der Mole-Spitzenform modellbasiert untersucht. Es konnte gezeigt werden, dass unter Verwendung nichtlinearer Spitzenprofile anstelle linear-konischer Profile bei gleichem Bauraum geringere Widerstandskräfte auftreten. Diese Erkenntnisse ermöglichen geeignete Kompromisse zwischen der Steigerung der Penetrationsleistung, der Reduzierung der äußeren Abmessungen und der Minimierung der Masse, für künftige Missionen.

Abstract

NASA's Mars-mission „InSight“ (Interior Exploration using Seismic Investigations, Geodesy and Heat Transfer) aims to investigate the evolution of rocky planets. Therefore the HP^3-Mole hammers itself deeper below the martian surface, than any other instrument before. Thereby the performance of this „self impelling nail“ is highly dependent on its inner stroke cycle, outer shape and the mutual influence with the surrounding regolith. Using the successfully validated DEM-MKS Co-Simulation, both the complex stroke cycle and the mutual influence to the soil are analyzed, while varying the tip shape. It is shown, that by using nonlinear tip shapes instead of linear-conical tips, the resistance force can be lowered while maintaining the outer dimensions. These insights enable proper compromises between increased performance, decreased dimensions and optimized mass for future missions.

1 Einleitung

Die als Discovery-Typ klassifizierte Marsmission „InSight“ (Interior Exploration using Seismic Investigations, Geodesy and Heat Transfer; [1, 2]) der NASA hat sich zum Ziel gesetzt, Fragen zur Entstehung erdähnlicher Planeten des inneren Sonnensystems zu beantworten. Das DLR stellt hierfür die wissenschaftliche Nutzlast HP^3 (Heatflow and Physical Properties Package; [3, 4]), um sowohl den Wärmestrom als auch das Temperaturprofil unter der Oberfläche des roten Planeten zu messen. Um diese Messungen durchzuführen, schlägt sich das Lokomotionssystem des Instrumentes, der HP^3-Mole, tiefer unter die Oberfläche des Mars als je ein anderes Instrument zuvor. Um das gewünschte Ziel von fünf Metern Tiefe unter Einhaltung des engen Massen- und Energiebudgets zu ermöglichen, wird ein spezieller Mechanismus als „selbsteinschlagender Nagel“ verwendet. In **Bild 1** ist eine Schnittzeichnung des HP^3-Mole mit den wichtigsten Systemen dargestellt. Darin sind sowohl der Schlagmechanismus als auch die wissenschaftlichen Instrumente STATIL (Static Tilt Measurement Unit) und TEM-A (Thermal Excitation Measurement-Active) zu sehen. Das Grundprinzip der Lokomotion des HP^3-Mole basiert dabei auf der Anisotropie der äußeren Reibung zwischen Gehäuse und Boden. Für den Vortrieb wird die Haftreibung und der Widerstand des Regoliths durch die Schlagenergie überwunden, die Rückschlagenergie hingegen wird durch die Suppressorbewegung und die Bremsfeder aufgenommen. Dabei ist die Bremsfeder so ausgelegt, dass die Energieabgabe zeitlich gestreckt wird und somit die Haftreibkraft, die eine Aufwärtsbewegung des Mole's verhindert, nie überschritten wird.

Der Vortrieb sowie die dafür benötigte Energie hängen dabei stark vom Ablauf des inneren Schlagzyklus, der äußeren Formgebung des Mechanismus und der gegenseitigen Interaktion mit dem Boden ab. In [5] wurden bereits erfolgreich Analysen und Optimierungen des Mechanismus in Zusammenhang mit einfachen Bodenmodellen vorgenommen. Hierdurch konnte bei gleichbleibender Eingangsleistung von weniger als 5 W die erreichte Tiefe von maximal 3 m auf die Zieltiefe von 5 m gesteigert und die dazu benötigte Schlaganzahl auf weniger als 25% des Ausgangswertes gesenkt werden. Da das innere Verhalten des Mechanismus jedoch stark vom Verlauf der äußeren Kräfte abhängt, sind für eine genaue Analyse und die Variation der äußeren Form detailliertere Bodenmodelle erforder-

lich. Hierfür wurde von LICHTENHELDT, SCHÄFER & KRÖMER [7] ein ursprünglich für die Nutzung für Räder planetarer Rover entwickeltes Bodenmodell auf Basis der Diskrete Elemente Methode (DEM) an die Anforderungen zur HP^3-Modellbildung angepasst und in einer Co-Simulation mit dem erweiterten Mehrkörpermodell des Mechanismus [6, 7] gekoppelt. Durch den Vergleich sowohl der Einzelmodelle für Boden und Mechanismus als auch der Co-Simulation mit dedizierten Messungen konnte die Validität der Modellierung nachgewiesen werden. Durch die Ergebnisse in [7] konnten bereits erste Erkenntnisse zum Einfluss des Bodens auf die Abläufe im Mechanismus gewonnen werden.

Für bisherige Systeme wurde die äußere Gehäuseform auf Grund von empirischen Zusammenhängen sowie Erfahrungswerten ausgelegt. Variationen der äußeren Gehäuseform am realen Prototyp sind jedoch zeitaufwändig und somit nicht mit dem engen Zeitplan planetarer Explorationsmissionen vereinbar. Zudem sind in Versuchen einige Bewertungsgrößen nicht oder nur schwer messbar. So ist z.B. die Bodenverformung um den HP^3-Mole nicht beobachtbar. Ebenso kann der innere Schlagzyklus nur unter großem Aufwand und in geringen Eindringtiefen (kleiner als eine Mechanismuslänge) beobachtet werden. Im Rahmen dieses Artikels wird daher die bestehende und verifizierte Modellbildung des HP^3-Mole aus [7] genutzt, um ein tiefer gehendes Verständnis in die Interaktion des Mechanismus mit dem Boden zu erlangen und zugehörige Effekte zu identifizieren. Aufbauend auf dem Verständnis des Schlagzyklus wird im Nachgang der Einfluss der äußeren Form des HP^3-Mole anhand des Öffnungswinkels untersucht. Dafür wird der Öffnungswinkel konischer Gehäusespitzen variiert. Weiterhin werden diese konischen Spitzen mit nichtlinearen Spitzenprofilen verglichen und so auch die nichtlineare Spitze des Flugmusters (PFM) beurteilt.

Die gewonnenen Erkenntnisse können sowohl für die Analyse des Verhaltens des Flugmusters des HP^3-Mole genutzt werden, als auch um die Entwicklung zukünftiger Mole Penetratoren zu unterstützen. Weiterhin ermöglichen die Modelle Versuche mit virtuellen Prototypen unter den realen Bedingungen auf dem Mars, welche vor dem Start der Mission so nicht erreicht werden können.

2 Aufbau & Modell des HP^3-Mole

Der HP^3-Mole besteht zum einem aus der wissenschaftlichen Nutzlast STATIL im Payload-Compartment, TEM-A auf der Außenhülle des Mechanismus, sowie dem eigentlichen Schlagmechanismus für die Lokomotion des Systems [3]. Sowohl das federnd gelagerte STATIL als auch der Schlagmechanismus sind in **Bild 1** zu sehen. Nicht dargestellt ist ein weiterer wissenschaftlicher Anteil des Instruments: TEM-P. Dabei handelt es sich um auf dem Science-Tether angebrachte Sensoren zum Erfassen des Temperaturprofils. Um auch bei Ablenkungen des Mole's an Hindernissen die korrekte Tiefe für TEM-A und TEM-P zu bestimmen, misst STATIL, zusätzlich zur reinen Längeninformation des TLM (Tether Length Measurement) die Inklination des Mole's. Da die schlaggetriebene Fortbewegung hohe Stoßlasten verursacht ist STATIL an „galaxieförmigen" Federn, den Shock Mitigation Springs [8], aufgehängt um die Sensoren zu schützen.

Der Schlagmechanismus des Mole's besteht grundlegend aus drei Hauptmassen: Hammer, Suppressor und Gehäuse. Zum Ausführen der Schläge wird der Hammer periodisch durch den Spannmechanismus auf den Suppressor zubewegt. Dafür greift der über eine spielbehaftete Kupplung mit dem DC-Motor gekoppelte Driveshaft in ein Kurvengetriebe ein, welches die Spannbewegung erzeugt. Durch diese Bewegung werden die Schlagfedern gespannt und speichern die Energie bis zum Auslösen des Schlages. Eine Aussparung in der Kurvenbahn führt dann zum Freigeben der Rolle am Driveshaft und somit zum Auslösen des Schlages (näheres zu diesem Prozess beschreiben [5] und [6]).

Sobald der Hammer freigegeben ist, entspannen sich die Schlagfedern und beschleunigen sowohl den Hammer als auch den über die Bremsfeder gelagerten Suppressor: Der Schlagzyklus beginnt. Der HP^3-Mole wurde während der gesamten Entwicklungsphase der Mission durch Simulationen unterstützt. Hierfür wurde durch LICHTENHELDT ET AL. [5–7] ein erweitertes Mehrkörperdynamikmodell des Mechanismus entwickelt, welches gemäß [7] die folgenden Aspekte modularisiert abbildet:

- die Körper und ihre kinematischen Beziehungen
- Spann- und Auslösevorgang inklusive der Elektrodynamik des DC-Motors
- Kontaktdynamik aller Kontaktstellen im Mechanismus
- Schlag- und Bremsfeder, sowie elastischer Beitrag der Kabel
- Umgebungsbedingungen für Mars und Erde: atmosphärischer Druck und Zusammensetzung, Temperatur und Gravitation
- kritische Reibungseffekte im Inneren des Mechanismus
- Gasfluss und Druckänderungen im Mechanismus, sowie deren Rückwirkung auf die Körper auf Basis dynamischer pneumatischer Netzwerke
- Einfluss des federnd gelagerten Payloads STATIL
- modulare äußere Kraftbedingungen (Teststände, verschiedene Bodenmodelle inkl. DEM)

Die entwickelten Modelle des Mechanismus wurden mit Hilfe des Health Check Test Stand (HCTS) für jeden real existierenden Prototypen mit Messungen verglichen [6, 7]. Durch die Ergebnisse der Optimierung aus [5] und die nötigen Anpassungen nach den Untersuchungen in [6] konnten

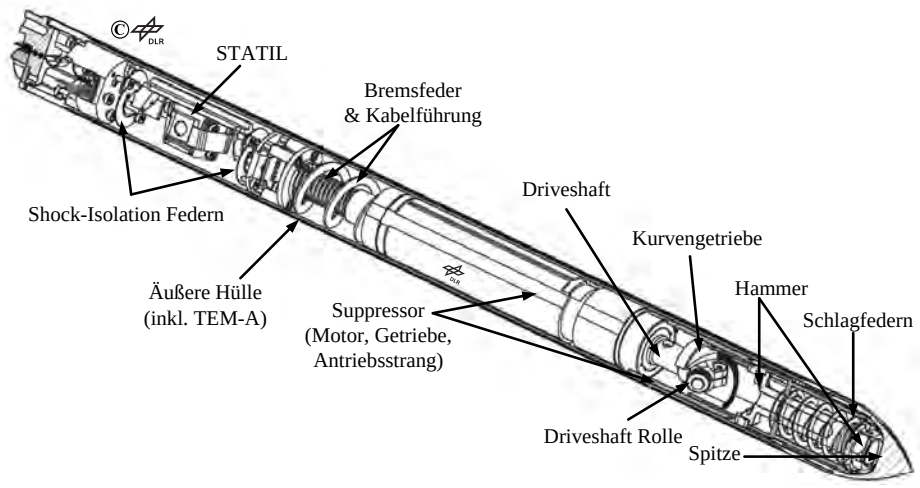


Bild 1 Schnittbild des HP^3-Mole nach [7]

die Optimierungsergebnisse in die nächste Evolutionsstufe des HP^3-Mole einfließen. Das neue Design wurde dabei vom polnischen Institut CBK durch die Konstruktion und Erfahrungen mit ähnlichen Systemen [9–11] unterstützt. Dabei wurde auch eine neue Spitze mit nichtlinearem Profilverlauf, gestützt auf die Erfahrungen mit dem KRET-Penetrator [9] vorgesehen.

Für Optimierung und Entwicklung des Mechanismus wurde ein schnell zu berechnendes, analytisches Bodenmodell auf Basis eines elasto-plastischen Elements [5] genutzt. Um jedoch die gegenseitige Abhängigkeiten der Dynamik des Mechanismus und des Bodens korrekt zu erfassen, werden detailliertere Bodenmodelle benötigt. Mittels des von LICHTENHELDT ET AL. [7] vorgestellten Co-Simulationsmodells, kann der Boden partikelbasiert und somit als diskretes Medium abgebildet werden. Dies ermöglicht eine natürliche Abbildung des Scherversagens und der Bodenverformung durch Partikelrelokation. Gemäß LICHTENHELDT ET AL. [7] ergeben sich folgende Hauptmerkmale des Modells:

- effiziente Abbildung der anisotropen Partikelrotation und der Kornform durch die Berechnung aus 2D-Rotationsgeometrien
- effiziente Berechnung von nichtlinearer Kohäsion auf Kornebene
- dynamisch mitbewegte Ränder des Simulationsgebietes
- gravitationsabhängige Schüttdichte des granularen Materials
- Vorabbestimmung der Modellparameter aus makroskopischen Messungen
- Implementierung im DEM-Modellframework für Terramechanik DEMETRIA [7] (basierend auf Pasimodo [12])

Gleichzeitig kann das dynamische Verhalten des Mechanismus mit den detaillierten, erweiterten Mehrkörpermodellen aus [5, 6] und [7] abgebildet werden. Dies ermöglicht ein direktes Abbilden des gegenseitigen Einflusses von Mechanismus und Boden. Das Partikelmodell des Bodens wurde bereits in [7] mit den jeweiligen Messdaten sowohl für Penetrometermessungen als auch für den tatsächlichen Schlagprozess des HP^3-Mole überprüft.

Nähere Informationen zur Modellbildung und dem Ablauf der Simulationen können [7] entnommen werden.

3 Schlagzyklus des HP^3-Mole & Rückwirkungen auf den Boden

Als Grundlage für die folgenden Untersuchungen wurden die Daten eines Vorläufers des HP3-Mole-Flugmusters verwendet. Diese Einheit weicht zwar in ihren Parametern leicht von denen des Flugmusters ab, jedoch stehen für diese Einheit Messwerte in Regolith-Simulanten zur Verfügung und die Überprüfbarkeit der Ergebnisse ist somit gewährleistet. Aus den vorgenannten Gründen sind die folgenden Simulationen und Diagramme für irdische Umgebungsbedingungen ausgeführt. Auf Änderungen unter den Bedingungen des Mars wird entsprechend verwiesen. Weiterhin sind die durchgeführten Simulationen wie auch die Betrachtungen in [7] für ein Simulant auf Basis von Quarzsand durchgeführt.

Der Schlagprozess des HP^3-Mole im Boden kann grundlegend in sechs Hauptprozesse gegliedert werden. Diese Hauptprozesse sind jeweils durch eine stoßartige Energieübertragung geprägt. Die Übergänge zwischen diesen Punkten erfolgen in der Regel durch kontaktfreie Bewegungen, bzw. werden nur durch Kontakte mit geringfügiger Energieübertragung beeinflusst. In **Bild 2** sind die Hauptprozesse I-VI im Geschwindigkeitsprofil der Hauptmassen des HP^3-Mole dargestellt. **Bild 3** zeigt die jeweils zugehörigen Stellungen der drei Hauptmassen während dieser Hauptprozesse, sowie in den Übergängen. **Bild 6** zeigt die aktuelle Position des Gehäuses im Boden zu jedem Zeitpunkt t.

In Stellung 0 (**Bild 3**) ist der Spannvorgang abgeschlossen und der Hammer wird freigegeben, im Anschluss beginnt dieser zusammen mit dem Suppressor zu beschleunigen. Da der Hammer eine geringere Masse als der Suppressor besitzt, wird ein größerer Teil der in den Schlagfedern gespeicherten Energie auf den Hammer übertragen. Nach vollständiger Entspannung der Federn trennt sich der Hammer von diesen und bewegt sich frei in Richtung Spitze. Während der Suppressor sich gegen die Penetrationsrichtung verschiebt, wird dieser zusätzlich von der Bremsfeder abgebremst. In Prozess I trifft der Hammer auf die Spitze, der erste Schlag wird ausgeführt. Durch die stoßartige Energieübertragung wird die initiale Festigkeit des Bodens überwunden und das Gehäuse bewegt sich in den Boden. Nach Erreichen der maximalen Eindringgeschwindigkeit sinkt die kinetische Gehäuseenergie durch die vornehmlich dissipativen Widerstandskräfte des Bodens. Durch diesen Prozess entsteht eine seismische Longitudinalwelle (**Bild 10**), welche sich durch den Boden ausbreitet.

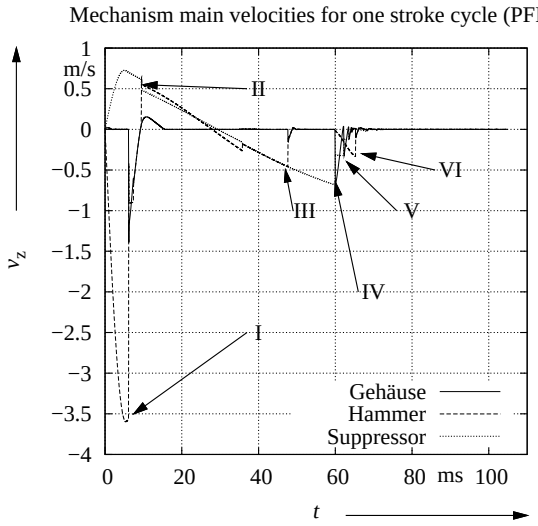


Bild 2 Geschwindigkeitsprofil der Hauptmassen für die PFM-Spitze nach [7]

Durch die gesenkte kinetische Energie des Hammers trennt sich dieser zunächst wieder vom Gehäuse, bewegt sich aber nachdem das Gehäuse durch die Widerstandskräfte abgebremst wurde wieder zusammen mit dem Gehäuse in Penetrationsrichtung. Im Boden bewegen sich während dieses Prozesses die durch die Longitudinalwelle beeinflussten Teilchen in einer rückläufigen Welle wieder auf das Gehäuse zu und verursachen somit das Eintreten einer Rückstellbewegung des Gehäuses. Diese Rückstellbewegung des Gehäuses wird durch Prozess II verstärkt. Dabei schließt der äußere Anschlag zwischen Suppressor und Hammer und die Bewegungsrichtung des Hammers wird auf Grund der höheren kinetischen Energie des Suppressors umgekehrt. Durch elastische Effekte und die geringere Hammermasse eilt der Hammer nach Prozess II dem Suppressor voraus. Durch Prozess II wird auch die äquivalente Trägheit des Gehäuses aus Sicht des Bodens gesenkt, da statt der Trägheiten des gemeinsam bewegten Hammers und Gehäuses lediglich noch die Gehäusemasse wirksam ist. Dementsprechend kann durch Prozess II die Rückstellbewegung durch die rückläufige Welle bei einer entsprechenden zeitlichen Abfolge verstärkt werden (vgl. **Bild 9**).

Im Übergang von Prozess II zu III wird der Suppressor bis zum Erreichen seines Umkehrpunktes durch Gravitation und die Bremsfeder abgebremst, während der Hammer zunächst nur durch die Gravitation beeinflusst wird. Unter irdischer Gravitation erreicht der Hammer seinen Umkehrpunkt vor dem Suppressor und eilt diesem in Richtung der Spitze solang voraus, bis der äußere Anschlag der beiden Massen erneut schließt und beide Massen sich mit gleicher Geschwindigkeit bewegen. Dieser Kontakt hat keinen maßgeblichen Einfluss auf die Bewegung des Gehäuses. Unter Marsgravitation hingegen kommt es zunächst zu einer Berührung des Hammers mit den Schlagfedern und damit zu einer Energieübertragung an den Suppressor. Hierdurch wird in aller Regel keine Erhöhung Suppressorgeschwindigkeit erreicht, sondern lediglich die bremsende Wirkung der Gravitation und Bremsfeder aufgehoben. Währenddessen beendet das Gehäuse seine Rückstellbewegung und erreicht einen Ruhezustand im Boden.

Mit Eintreten von Prozess III schlägt der Hammer erneut auf die Spitze. Dieser Prozess ruft auf Grund der niedrigen verbleibenden Hammerenergie nur geringfügige Verschiebungen hervor ruft und wird daher nicht als Schlag im Sinne des Schlagzyklus gezählt. Zwischen Prozess III und IV kommen sowohl Hammer als auch Gehäuse in einen Ruhezustand. Im anschließenden Prozess IV trifft der Suppressor wieder auf die Spitze, der zweite Schlag im Sinne des Schlagzyklus wird ausgeführt. Durch diesen Schlag wird erneut die Bodenfestigkeit überwunden, das Gehäuse bewegt sich in den Boden. Analog zum ersten Schlag entsteht eine weitere seismische Longitudinalwelle. Durch die während des Schlagprozesses an das Gehäuse übertragene Energie sinkt die kinetische Energie des Suppressors und dieser trennt sich wieder vom Gehäuse. Dabei kann nicht von einem Zurückprallen gesprochen werden, da der Suppressor seine Bewegungsrichtung beibehält. Weiterhin folgt der Hammer, bedingt durch seine Trägheit, dem Gehäuse nicht sofort, und wird erst durch die Gravitation wieder in Richtung der Spitze beschleunigt. Mit Prozess V tritt der dritte Schlag des Zyklus durch den Kontakt von Suppressor und Spitze auf. Durch diesen zeitlich direkt auf den zweiten Schlag folgenden Kontakt, wird wiederum eine Longitudinalwelle ausgesannt. Diese Welle folgt dabei hinreichend schnell auf Prozess IV, um dessen rückläufige Welle auszulöschen. Dies führt dazu, dass im Gegensatz zum ersten Schlag keine Rückstellbewegung des Gehäuses stattfindet (siehe **Bild 6**). Zunächst stand in Frage, ob dieser Effekt in Realität zu beobachten ist oder nur einen Artefakt des Simulationsmodells darstellt. Der Effekt der ausbleibenden Rückstellbewegung nach dem zweiten Schlag, konnte jedoch in Highspeed-Videoaufnahmen des realen Systems in geringer Tiefe bestätigt werden.
Auf den dritten Schlag folgen noch weitere schwächere Schläge des Suppressors, welche keinen nennenswerten Beitrag zur Penetrationstiefe leisten und daher nicht als

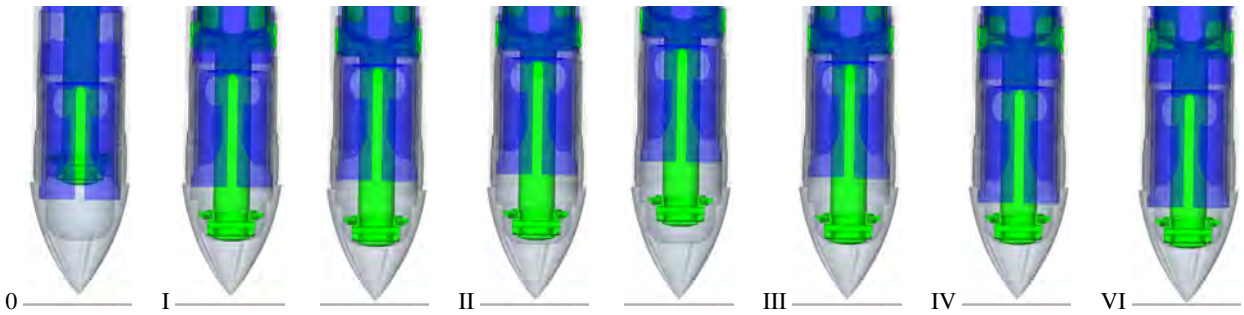


Bild 3 Gerenderte Darstellung der Positionen der drei Hauptmassen während des Schlagzyklus (nach [7])

Schläge im Sinne des Schlagzyklus betrachtet werden. In Prozess VI trifft anschließend der Hammer wieder auf die Spitze, jedoch ist auch dieser Schlag nicht maßgeblich an der Penetration beteiligt. Nach Prozess VI geht das gesamte System in den Ruhezustand über und verbleibt in diesem bis der nächste Spannprozess folgt (näheres zum Spannprozess siehe [5, 6]). Für den Ablauf auf dem Mars erfolgen die Prozesse IV-VI zeitlich gedehnt und in leicht veränderter Intensität, der qualitative Ablauf verändert sich jedoch nicht. Für andere äußere Kraftbedingungen als die Penetration von Boden kann der Schlagzyklus stark abweichen. Somit ist für die Entwicklung von Teststänen auf die Ähnlichkeit der Kraftverläufe zu den Widerständen im Boden zu achten.

4 Einfluss der Spitzengeometrie

Um einen ersten Vergleich der Einflüsse der äußeren Form des Mole's vorzunehmen, wird zunächst die Spitze variiert. Um hierbei möglichst systematisch vorzugehen, werden konische Spitzen mit Profil-Steigungswinkel $\beta(r) = \text{const.}$ betrachtet. Da durch Messungen am „KRET“ [9] bereits bekannt ist, dass nichtlineare Profilwinkelverläufe bei gleicher Baulänge zu einem verbesserten Eindringverhalten führen können, werden auch zwei nichtlineare Spitzen betrachtet. Die untersuchten Spitzen sind als Oberflächenmodelle in **Bild 4** abgebildet. Bei der ersten nichtlinearen Spitze handelt es sich um die Spitze des Flugmusters des HP^3-Mole's, bei der zweiten sogenannten „Blunt“ Spitze wurde zunächst ein größerer Steigungswinkel gewählt, welcher über dem Radius sinkt.

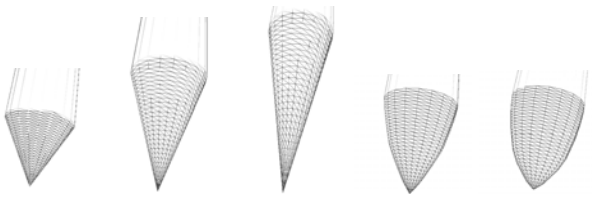


Bild 4 Verschiedene Spitzen: 60°, 40°, 25°, PFM Spitze, „Blunt“ Spitze

Ziel dieser Spitze ist es einen möglichst tangentialer Übergang zum zylindrischen Teil des Gehäuses unter Beibehaltung der Länge der PFM-Spitze zu erreichen. Die Charakterisierung der Böden für den Mole erfolgt über die Spitzenwiderstandsspannung aus Cone-Penetrometermessungen mit einem Steigungswinkel von 60°. Um eine bessere Vergleichbarkeit der im folgenden ermittelten Ergebnisse zu erhalten, werden die Spannungen auf die Spitzen jeweils mit denen einer 60° Spitze normiert. Entsprechend normierte Größen sind mit $(\ldots)_0$ notiert. Die Auflösung Γ der Partikel wurde gemäß [7] so gewählt, dass alle Spitzenvarianten der Co-Simulation das Kriterium $\Gamma \geq 9$ erfüllen.

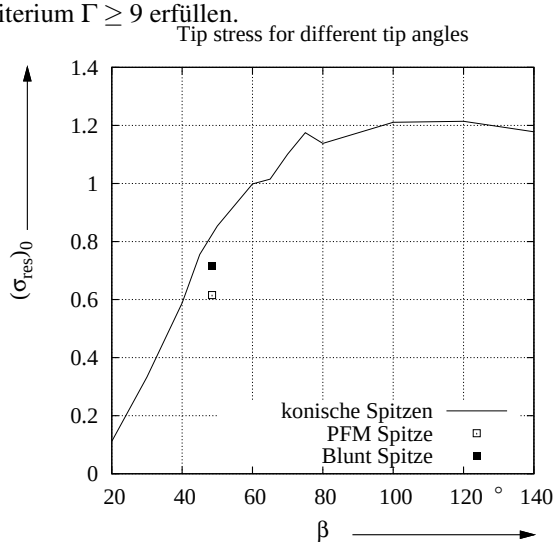


Bild 5 Auf eine 60° Spitze normierter Verlauf der Spitzenwiderstände für rheonome Fortbewegung

Gemäß dem von LICHTENHELDT ET AL. [7] vorgeschlagenen Ablauf der Co-Simulation sind zunächst DEM-Simulationen durchzuführen, in denen das Mole-Gehäuse rheonom bis auf die entsprechende Zieltiefe geführt wird, um die Gesamtsimulationsdauer gering zu halten. Dabei wird die Geschwindigkeit nach [7] als maximal zu erwartende Geschäusegeschwindigkeit während des Schlagprozesses gewählt. Da der Schlag in der Co-Simulation in 1 m Tiefe erfolgt, können diese Initialisierungssimulationen bereits für einen Vergleich herangezogen werden. Dies ermöglicht den Vergleich einer größeren Anzahl von Steigungswinkel als in der Co-Simulation, da nur der erste Schritt des Co-Simulationsprozesses aus [7] durchgeführt werden muss.

Bild 5 zeigt den normierten Eindringwiderstand $(\sigma_{res})_0$ über dem Profilwinkel. Wie zu erwarten ist steigt der Eindringwiderstand für stumpfere Spitzen. Erwähnenswert ist

dabei, dass ab 100° ein Plateau des Spitzenwiderstandes erreicht wird und dieser mit weiter zunehmendem Steigungswinkel nicht nennenswert ansteigt. Zusätzlich zu den konischen Spitzen sind auch die beiden nichtlinearen Spitzen mit ihrem äquivalenten Profilsteigungswinkel (berechnet aus Radius und Länge) dargestellt.

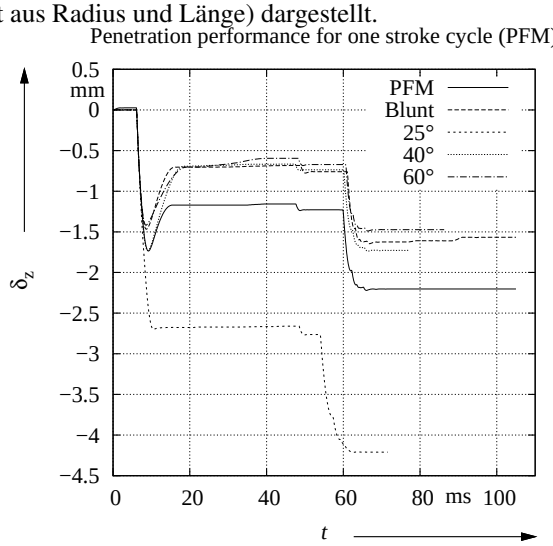


Bild 6 Penetrationstiefe während eines Schlagzyklus für verschiedene Spitzen

Die „Blunt“ Spitze zeigt bereits eine Senkung des Widerstandes gegenüber konischen Spitzen. Mittels der PFM-Spitze kann der Spitzenwiderstand weiter gesenkt werden und liegt auf dem Niveau einer 40° Spitze, bei der Länge einer 48.5° Spitze.

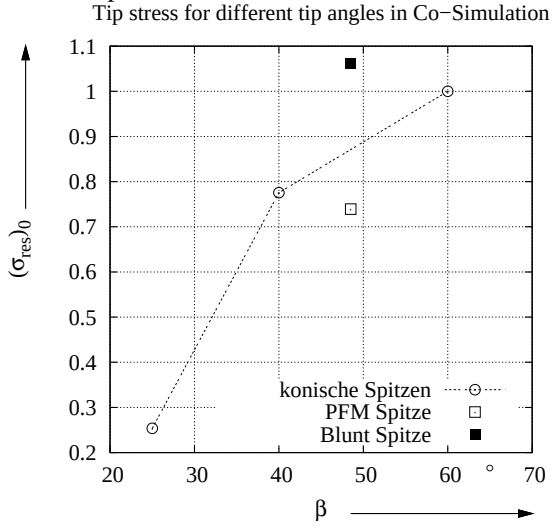


Bild 7 Auf eine 60° Spitze normierter Verlauf der maximalen Spitzenwiderstände für den ersten Schlag

Da jedoch zu erwarten ist, dass durch die feste Gehäusegeschwindigkeit das Bodenverhalten beeinflusst wird, erfolgen weitere Vergleiche am tatsächlichen Schlagzyklus in der Co-Simulation. Analog zum Vorgehen zur rheonomen Gehäusebewegung wird auch für die durchgeführten Co-Simulationen der Penetrationswiderstand $(\sigma_{\text{res}})_0$ verglichen. Dabei werden die Widerstandsspannungen während des ersten (**Bild 7**) und des zweiten Schlages (**Bild 8**) gesondert betrachtet. Für die konischen Spitzen werden die Beobachtungen aus dem vorherigen Vergleich qualitativ bestätigt, jedoch tritt eine geringere Senkung des Widerstandes für spitzere Winkel als 60° ein. Im Vergleich zu $\beta = 40°$ zeigt die PFM-Spitze geringere Widerstandswerte. Im Bezug auf $\beta = 60°$ ist jedoch auch hier die Widerstandssenkung geringer. Die „Blunt“ Spitze zeigt für beide Schläge ein gänzlich anderes Verhalten, ihre Widerstandswerte liegen über denen der 60° Referenzspitze. Für den zweiten Schlag bestätigen sich diese Beobachtungen. Es ändern sich lediglich einige Relationen zwischen den Varianten, so zeigt die PFM-Spitze im zweiten Schlag einen höheren Widerstand als die 40° Variante.

Bild 6 zeigt den Vergleich der Eindringtiefen der Varianten. Dabei werden die Erkenntnisse aus den Widerstandsdiagrammen größtenteils bestätigt. Analog zu den Ergebnissen aus **Bild 5** und **7** ist die PFM-Spitze performanter als die 40° Variante, wobei dies maßgeblich durch die stärkere Rückstellbewegung für $\beta = 40°$ verursacht wird. Wie erwartet erreicht $\beta = 25°$ die höchste Penetrationsleistung. Dies begründet sich zum einen in den niedrigeren Eindringwiderständen, als auch in der fast ausschließlich radial verlaufenden seismischen Wellenausbreitung (**Bild 10**).

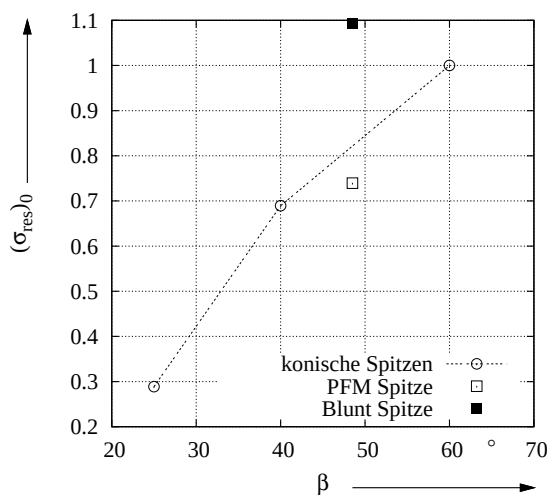


Bild 8 Auf eine 60° Spitze normierter Verlauf der maximalen Spitzenwiderstände für den zweiten Schlag

Durch diese radiale Ausbreitung ergibt sich eine geringere Vertikalkomponente der rückläufigen Welle und damit eine vernachlässigbare Rückstellbewegung. Wie in **Bild 9** zu sehen, steigt jedoch auch die Relativgeschwindigkeit von Hammer und Suppressor während Prozess II und damit die Lasten auf den Antriebsstrang. Da erhöhte Energieübertragung in diesem Kontakt gemäß [6] zu Problemen führen kann, bleibt zu prüfen ob die Lasten im zulässigen Bereich liegen. Weiterhin ist zu erkennen, dass der gesamte Schlagzyklus bereits 10 ms früher als in den anderen Varianten abgeschlossen ist. Die Geschwindigkeitsprofile der anderen Varianten unterscheiden sich hauptsächlich in der Ausprägung der Rückstellbewegung und -geschwindigkeit, sowie dem zeitlichen Auftreten von Prozess II.

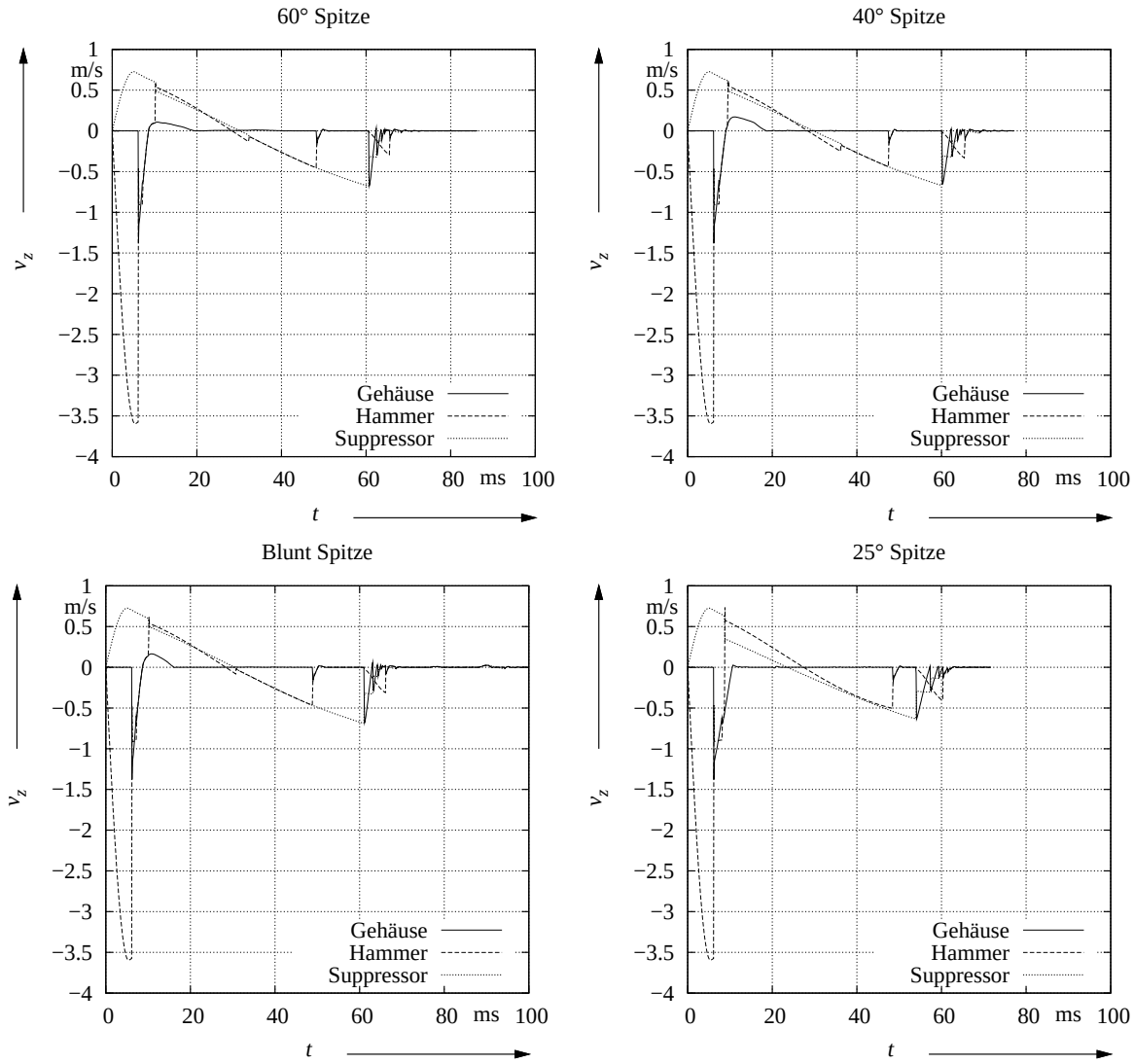


Bild 9 Geschwindigkeiten der drei Hauptmassen für verschiedene Spitzen

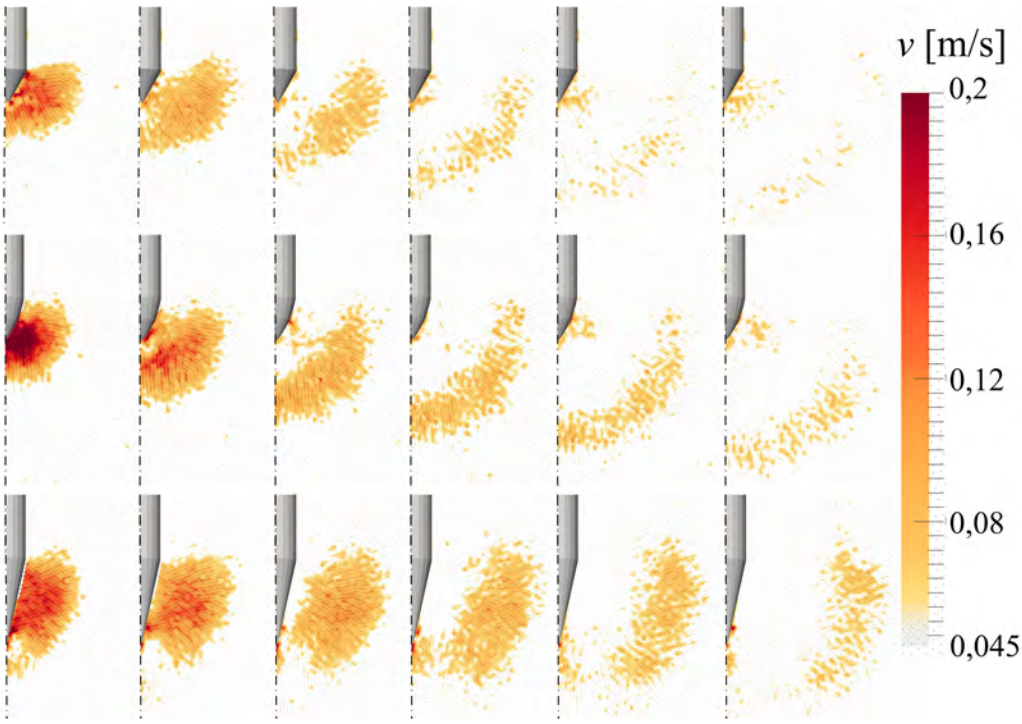


Bild 10 Geschwindigkeitsfelder im Boden 2-7 ms nach dem ersten Schlag für 60° (oben), PFM (mitte) und 25° (unten)

5 Zusammenfassung

Für Penetratorsysteme wie den HP^3-Mole sind Änderungen der äußeren Geometrie am realen Prototyp mit großem Aufwand verbunden und nötige Bewertungsgrößen können nicht oder nur mit großem Aufwand gemessen werden. Zudem sind solche breit angelegten Messkampagnen durch die engen Zeitpläne planetarer Explorationsmissionen häufig nicht möglich. Um dennoch einen sinnvollen Kompromiss aus verbessertem Eindringverhalten, Randbedingungen für den Bauraum und minimierter Masse zu ermöglichen, wurden mit dem Co-Simulationsmodell aus [7] erste Untersuchungen zu den Einflüssen der äußeren Geometrie vorgenommen. Hierfür wurden sowohl für feste Gehäusegeschwindigkeiten als auch den eigentlichen Schlagprozess verschiedene konische Spitzen und nichtlineare Profilwinkelverläufe untersucht.

Dabei zeigt sich, dass vereinfachte Simulationen mit fester Eindringgeschwindigkeit, welche lediglich den ersten Schritt aus dem Co-Simulationsprozess nach LICHTENHELDT ET AL. [7] benötigen, bereits eignen, um erste Vergleiche anzustellen. Durch die beobachteten Abweichungen zum Verhalten während des Schlages, sollte jedoch die feste Geschwindigkeit auf die mittlere Penetrationsgeschwindigkeit während des ersten Schlages gesenkt werden. Für eine abschließende Beurteilung ist das Verhalten einer Vorauswahl von Varianten im Schlagprozess zu vergleichen. Mit diesem Vorgehen kann die Zeit für eine Simulationskampagne deutlich gesenkt werden.

Mit den erhaltenen Ergebnissen bestätigt sich die Vermutung, dass spitzere Steigungswinkel zu einem verbesserten Eindringverhalten von Mole-Penetratoren führen. Zudem konnte gezeigt werden, dass „projektilförmige“ Spitzen mit radial sinkendem Profilwinkel, konischen Spitzen gleicher Länge bei konstanter Geschwindigkeit überlegen sind. Jedoch wurde ebenfalls gezeigt, dass diese Form sich für schlaggetriebene Lokomotion als nachteilig erweist. Weiterhin konnte gezeigt werden, dass die aus Erfahrungen am „KRET“ [9] abgeleitete nichtlineare Spitze des Flugmusters des HP^3-Mole den Penetrationswiderstand bei gleichem Bauraum um 10 bis 15% senken kann.
Für künftige Missionen und Mole Systeme sollten daher weitere geometrische Einflüsse der äußeren Form untersucht und optimiert werden.

6 Literatur

[1] NASA InSight Homepage: http://insight.jpl.nasa.gov, checked 12/2013, NASA, 2013

[2] Barnerdt, W.B. et al.: INSIGHT: A discovery mission to explore the interior of Mars. In: 44th Lunar and Planetary Science Conference, Texas, USA, 2013.

[3] Spohn, T. et al.: INSIGHT: Measuring the martian heat flow using the Heatflow and Physical Properties Package (HP3). In: 43th Lunar and Planetary Science Conference, Texas, USA, 2012.

[4] Spohn, T. et al.: Measuring the Martian heat flow using the Heatflow and Physical Properties Package (HP3). In: 45th Lunar and Planetary Science Conference, Texas, USA, 2014.

[5] Lichtenheldt, R.; Schäfer, B.: Hammering beneath the Surface of Mars - Modellbildung und Optimierung des HP3-Mole. In: Proceedings of „10. Kolloquium Getriebetechnik“, pp. 169-186, ISBN 978-3-86360-065-5, Ilmenau, Germany, 2013

[6] Lichtenheldt, R.; Schäfer, B.; Krömer, O.; van Zoest, T.: Hammering beneath the Surface of Mars - Forensic Engineering of failures in the HP^3-Mole by applying multi-body dynamics simulation. In: Proceedings of 3rd International Conference on Multibody System Dynamics, ISBN 978-89-950027-7-3, Busan, Korea, 2014.

[7] Lichtenheldt, R.; Schäfer, B.; Krömer, O.: Hammering beneath the surface of Mars - Modeling and simulation of the impact-driven locomotion of the HP^3-Mole by coupling enhanced multi-body dynamics and discrete element method. In: Shaping the future by engineering: 58th IWK, Ilmenau Scientific Colloquium, URN: urn:nbn:de:gbv:ilm1-2014iwk:3 Technische Universität Ilmenau, Germany, 2014

[8] Kletz, B.T.; Melcher, J.: SHOCK ISOLATION ON PLANET MARS. In: Proceedings of 13th European Conf. on Spacecraft Structures, Materials & Environmental Testing, Braunschweig, Germany, 1-4 April 2014 (ESA SP-727, June 2014)

[9] Grygorczuk, J.; Seweryn K.; Wawrzaszek R.; Banaszkiewicz M.: TECHNOLOGICAL FEATURES IN THE NEW MOLE PENETRATOR „KRET“. In: 13th European Space Mechanisms and Tribology Symposium - ESMATS 2009, Wien, Österreich 23-25 September, 2009

[10] Seweryn, K. et al.: Low velocity penetrators (LVP) driven by hammering action - definition of the principle of operation based on numerical models and experimental tests. Acta Astronautica, 99, pp. 303-317, 2014

[11] Seweryn, K. et al.: Determining the geotechnical properties of planetary regolith using Low Velocity Penetrometers. Planetary and Space Science, 99, pp. 70-83, 2014

[12] Fleissner, F.: Pasimodo v1.15.0: software package and template files, Inpartik & ITM University of Stuttgart, Tübingen/Stuttgart, 2014

Analyse und Bewertung verschiedener Fahrradhinterbaukinematiken gefederter Fahrräder

Missong, RWTH Aachen University, Institut für Getriebetechnik und Maschinendynamik (IGM), 52072 Aachen,
Ingenlath, RWTH Aachen University, IGM, 52072 Aachen,
Charaf Eddine, RWTH Aachen University, IGM, 52072 Aachen,
Corves, RWTH Aachen University, IGM, 52072 Aachen,
ingenlath@igm.rwth-aachen.de

Kurzfassung

In Deutschland ist die Zahl der Fahrräder in den letzten Jahren auf 71 Millionen Stück gestiegen. Allein 2013 wurden ca. 3,8 Mio. Fahrräder zu einem durchschnittlichen Stückpreis von 536 € abgesetzt. Der Großteil der abgesetzten Fahrräder waren dabei Trekking-Räder (32%), City-Räder (23%) und E-Bikes (11%), gefolgt von Mountainbikes (10%) und All Terrain Bikes (9%) [1,2]. Dabei ist gerade im Bereich der Mountainbikes (MTBs) und All Terrain Bikes der Einsatz von Vorder- und Hinterradaufhängungen üblich.
Die meisten wissenschaftlichen Veröffentlichungen in den Ingenieurwissenschaften zum Thema Fahrrad beziehen sich auf die Dynamik von Fahrrädern und deren grundsätzliche Charakterisierung. Einen Überblick hierzu findet sich in [3,4]. Im Gegensatz dazu beschäftigt sich diese Veröffentlichung mit der Kinematik vollgefederter MTBs, für die Groß 1997 bereits ähnliche Untersuchungen durchgeführt hat [5]. Allerdings hat die im Laufe der letzten Jahre gestiegene Variantenzahl zu einer Vielzahl an schwer zu unterscheidenden Kinematikkonzepten geführt.
Vor diesem Hintergrund werden in dieser Arbeit die in der Fahrradbranche üblichen Benennungen der Konzepte gezeigt und deren kinematische Konzepte erläutert. Hierfür wird eine zufällige Auswahl von über 100 aktuell erhältlichen Fahrradmodellen von 29 verschiedenen Herstellern hinsichtlich der verwendeten Kinematiken untersucht. Eine Übersicht der Verteilung der verschiedenen Konzepte ist in Abbildung 1 d) gezeigt. Die am häufigsten auftretenden Konzepte (*Horst-Link*, *Viergelenker* und *Virtual Pivot Point (VPP)*) sind in Abbildung 1 a) bis c) dargestellt.

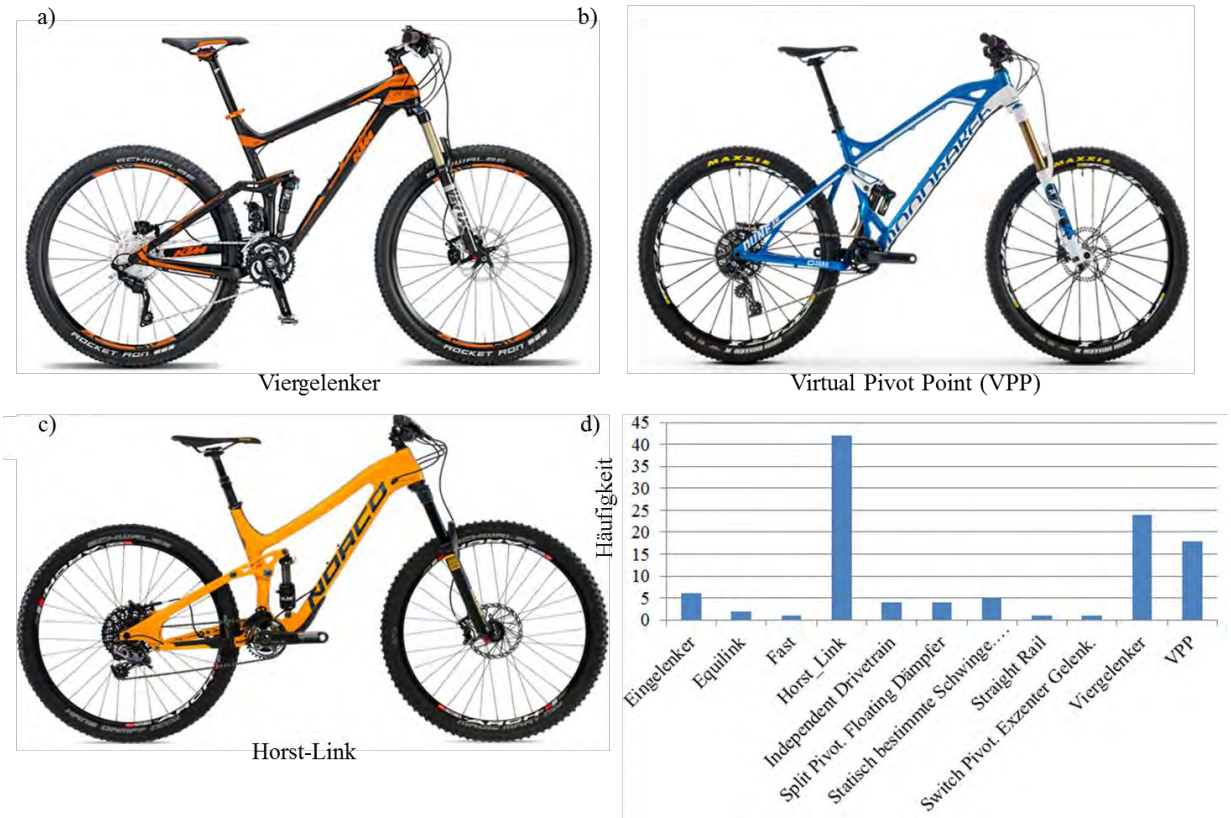


Abbildung 1: a) „KTM“-Viergelenker (©KTM) b) „Mondraker“-VPP (©Mondraker) c) „Norco“-Horst-Link (©Norco)
d) Übersicht über die Häufigkeit der identifizierten Kinematikkonzepte unter den untersuchten Fahrradmodellen

Um die verschiedenen am Markt erhältlichen Konzepte sinnvoll vergleichen zu können, werden verschiedene Bewertungskriterien vorgestellt und exemplarisch auf ausgewählte Fahrradmodelle angewendet. So werden beispielsweise das Ansprechverhalten des Hinterbaus, der Bremsnickausgleich und die am Hinterrad wirksamen nichtlinearen Feder-/Dämpferkräfte untersucht. Eine weitere betrachtete Eigenschaft, die durch die Kinematik beeinflusst wird, ist die Reaktion auf Antriebseinflüsse, d.h. die Neigung des Rades beim Pedalieren zu wippen.
Für einen weitergehenden Vergleich sollen in Zukunft auch die Masse und Steifigkeit der Konzepte berücksichtigt werden.

Literatur

[1] Bracher, T.; Hertel, M.: *Radverkehr in Deutschland Zahlen, Daten, Fakten*. ISBN 978-3-88118-533-2

[2] Statista: Fahrradindustrie – Statista Dossier 2014 (2014). http://de.statista.com/themen/173/fahrrad/, abgerufen am 18.122014 um 15.20 Uhr

[3] Schwab A.L.; Meijaard, J.P.: *A review on bicycle dynamics and rider control*. Vehicle System Dynamics. (2013) 51(7):1059-1090, ISSN: 0042-3114

[4] Kooijman, J.D.G.; Schwab, A.L.: *A review on bicycle and motorcycle rider control with a perspective on handling qualities.* Vehicle System Dynamics. (2013) 51(11):1722–1764, ISSN: 0042-3114

[5] Groß, E.: *Betriebslastenermittlung, Dimensionierung, strukturmechanische und fahrwerkstechnische Untersuchung von Mountainbikes*. Düsseldorf: VDI Verlag 1997. ISBN 3-18-330812-6

Nachgiebiger fluidisch aktuierter Elektrodenträger für Cochlea-Implantate
Compliant fluidically actuated electrode carrier for cochlear implants

Lena Zentner*, Mirna Issa*, Stefan Griebel*, Clemens Wystup*, Silke Hügl+, Thomas S. Rau+, Omid Majdani+

*Technische Universität Ilmenau, Fakultät für Maschinenbau, Fachgebiet Mechanismentechnik, 98693 Ilmenau, Deutschland, lena.zentner@tu-ilmenau.de
+Medizinische Hochschule Hannover, Klinik für Hals-, Nasen-, Ohren-Heilkunde, Carl-Neuberg-Str. 1, 30625 Hannover, huegl.silke@mh-hannover.de

Kurzfassung

Das Cochlea-Implantat, bestehend aus einem nachgiebigen Elektrodenträger (ET) und den eingebetteten Elektroden mit Kontaktdrähten, ist eine auditorische Neuroprothese, die operativ in die Cochlea eingeführt wird, um einen Höreindruck bei hörgeschädigten Patienten zu ermöglichen. Zur Insertionserleichterung wird ein fluidisch aktuierter Elektrodenträger mit veränderbarer Krümmung vorgestellt. Seine Verformung wird durch Druckbeaufschlagung im Innenraum sowie einen in die Wand eingebetteten, nichtdehnbaren Faden oder Streifen gezielt manipuliert. Zwei mögliche Varianten des ET werden betrachtet: ein im drucklosen Zustand gerader und ein gekrümmter ET. Zur Ermittlung der Geometrie des ET wird eine modellbasierte Synthese durchgeführt: FE-Methode kombiniert mit analytischer Modellbildung. Eine Validierung des analytischen Modells anhand der FE-Methode im Maßstab 3:1 ergibt einen Unterschied unter 2% bezogen auf die Länge des ET und 18% bezogen auf die kleinste Cochlea-Querschnittsabmessung. Ein Funktionsmuster zeigt, dass die vorgestellte Methode für die Entwicklung chirurgischer Instrumentarien mit veränderlicher Krümmung geeignet ist.

Abstract

The cochlear implant, consisting of a compliant electrode carrier (ET) and embedded electrodes with contact wires, is an auditory neuroprosthesis, which is surgically inserted into the inner ear (cochlea) in order to create an auditory impression in the hearing-impaired patients. For simplification of the insertion, a fluidically actuated electrode carrier with a changeable curvature is presented. The deformation of the ET is specifically manipulated by applying pressure to its interior and also by a non-stretchable thin fibre or stripe embedded in its wall. Two possible variants of the ET are considered: a straight and a curved ET in the non-pressurized state. In order to determine the geometry of the ET, a model-based synthesis - FE method combined with analytical modelling – is carried out. A validation of the mathematical model based on the FE method on a scale of 3:1 results in a difference less than 2% relating to the length of the ET and 18% relating to the smallest dimension of cochlear cross section. A functional model shows that the presented method is suitable for the development of various surgical instruments with changeable curvature.

1 Einleitung

Das Cochlea-Implantat (CI) ist eine auditorische Neuroprothese, die operativ in das Innenohr (Cochlea) inseriert wird, um den Hörnerv direkt elektrisch zu stimulieren [1, 2]. Dadurch kann den Patienten mit Taubheit und an Taubheit grenzender Schwerhörigkeit ein Höreindruck ermöglicht werden.
Ein Cochlea-Implantat-System besteht aus einem außerhalb des Körpers getragenen Mikrophon sowie dem Audioprozessor und einem in den Körper zu implantierenden Teil. Dieser besteht aus einem Prozessorgehäuse mit integrierter Spule und einem sogenannten Elektrodenträger, in dem mehrere Elektroden zur Stimulation des Hörnervs eingebettet sind (Bild 1). Dieser nachgiebige Elektrodenträger wird operativ in die Cochlea eingeführt.
Kommerziell verfügbare Elektrodenträger (Bild 2) haben entweder eine gerade oder eine gekrümmte Form. Gerade Elektrodenträger liegen nach der Insertion in die spiralförmige Cochlea an deren Außenwandung an, während gekrümmte Elektrodenträger nach der Insertion an der Innenwandung der Cochlea liegen. Diese Endpositionen werden als lateral bzw. perimodiolar bezeichnet. Der Hörnerv, dessen Nervenzellen durch das Implantat stimuliert werden sollen, entspringt in der Achse der spiralförmigen Cochlea. Daher verringert eine perimodiolare Endlage des Implantates den Abstand zwischen den Stimulationselektroden und den zu stimulierenden Nervenzellen, was mit einer Verringerung der benötigten Energie zur Stimulation und verbesserter Frequenzselektivität verbunden wird [3].
Infolgedessen ist die Funktionalisierung von Elektrodenträgern mit dem Ziel einer perimodiolaren Endlage Gegenstand aktueller Forschung. Verschiedene Ansätze beispielsweise unter Nutzung von Hydrogelen [9], Formgedächtnisaktoren [3] oder magnetischer Führung des Implantates [10] während der Insertion wurden vorgestellt.

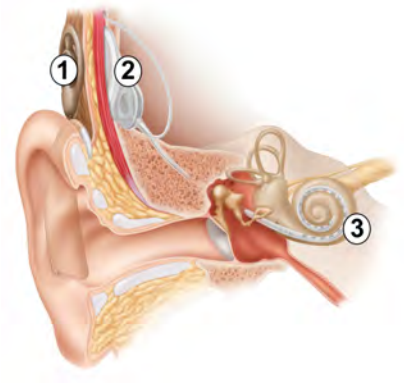


Bild 1 Cochlea-Implantat-System, bestehend aus einem extern getragenen Audioprozessor (1) und einem internen Teil mit der Spule (2) und dem Elektrodenträger (3), welcher in die gewundene Form der Cochlea eingeführt wird; mit freundlicher Genehmigung: Cochlear Ltd., Sydney, Australia

Obwohl diese Implantation ein etabliertes Operationsverfahren darstellt, kann eine beachtliche Patientengruppe – und zwar mit erhaltenswertem Resthörvermögen – noch nicht adäquat versorgt werden. Während der Einführung des CI in die gewundene Form der Cochlea [3] kann es zu Schäden an der Basilarmembran und den noch intakten Haarsinneszellen kommen, was zu einer operationsbedingten Ertaubung führt.

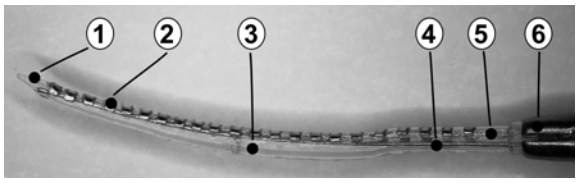


Bild 2 Cochlea-Implantat: (1) – Spitze des Elektrodenträgers, (2) – Elektroden aus Platin, (3) – Elektrodenträger aus Silikon, (4) – Stilett, (5) – Elektrodendrähte, (6) – Halterung des Cochlea-Implantats; [8]

Demzufolge können diese Patienten von einer kombinierten Versorgung durch die gleichzeitige Nutzung des Cochlea-Implantats und des Resthörvermögens nicht mehr profitieren. Um das Risiko einer iatrogenen Ertaubung zu reduzieren, wird hier ein fluidisch aktuierter Elektrodenträger für die Anwendung im Cochlea-Implantat vorgestellt. Die fluidische Aktuierung betrifft hier die Beeinflussung der Krümmung des Elektrodenträgers während seiner Einführung in die Cochlea. Das Ziel ist dabei, die Krümmung des Elektrodenträgers Schritt für Schritt an die Form der Cochlea so anzupassen, dass die Insertion mit minimaler Kontaktkraft zur Cochleainnenwandung, im Idealfall kontaktlos, erfolgt. Dadurch können die Schäden an den fragilen Strukturen innerhalb der Cochlea minimiert bzw. vermieden werden.

2 Aktuierung des Elektrodenträgers

Um ein gezieltes Verformungsverhalten des Elektrodenträgers zu erzielen, wird in seinem Körper ein Hohlraum vorgesehen, welcher fluidisch mit Druck beaufschlagt werden kann. In die Wand des Elektrodenträgers wird ein nicht dehnbarer Faden oder Streifen, im Folgenden als Formgebungsfaden bezeichnet, eingebettet. Durch die Druckerhöhung im Innenraum des Elektrodenträgers kommt es zur Dehnung einer Wandseite, wobei die Dehnung der anderen Wandseite durch den eingebetteten Formgebungsfaden verhindert wird. Somit kommt es zu einer Krümmung des Elektrodenträgers, welcher im Bild 3a schematisch dargestellt ist.

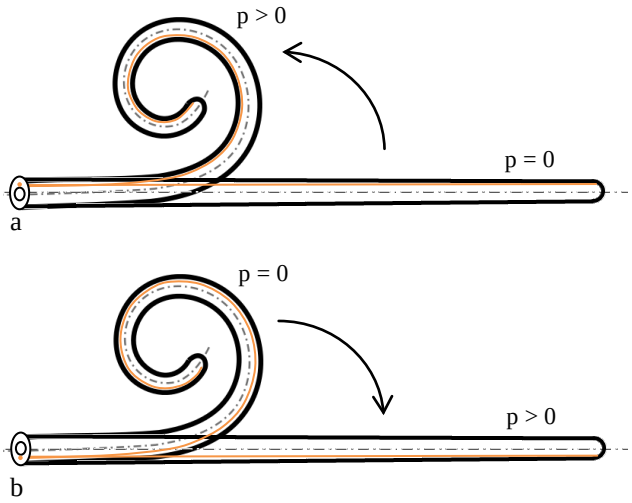


Bild 3 Darstellung des Prinzips für die fluidische Aktuierung, a: eine gerade Form des Elektrodenträgers, die unter Erhöhung des Innendruckes p>0 eine gekrümmte Form annimmt; b: eine gekrümmte Form des Elektrodenträgers, unter Erhöhung des Innendruckes p wird die Krümmung kleiner, im Sonderfall kommt es zu einer geraden Form

Um eine gezielte Krümmung zu erreichen, soll der Querschnitt des nachgiebigen Elektrodenträgers so gestaltet werden, dass dieser während der Insertion seine Krümmung entsprechend dem natürlichen Verlauf des Innenohres ändert, um durch gezielte Konfigurationsänderung das Maß an Kontakt zwischen Implantat und umgebender Anatomie zu minimieren. Es werden zwei mögliche Varianten des Elektrodenträgers betrachtet [5, 6]: (1) – eine gerade Form im drucklosen Zustand (Bild 3a) und gekrümmt entsprechend der Cochleaform bei einem maximalen Druck; (2) eine gekrümmte Form entsprechend der Cochleawindung im drucklosen Zustand (Bild 3b) mit einer geraden Form bei maximalem Druck. Die zweite Variante hat den Vorteil, dass eine gezielte drucklose Endlage des CI-Elektrodenträgers nach der Insertion bestehen bleibt und somit der Innendruck nicht aufrecht gehalten werden muss.

3 Modellbasierte Synthese des Elektrodenträgers

Zur Ermittlung der Geometrie des neuen Elektrodenträgers, welcher seine Krümmung gezielt ändern soll, wird eine modellbasierte Synthese durchgeführt. Dabei werden die FE-Methode und die analytische Modellbildung in einer Kombination verwendet. Die nichtlinearen Materialeigenschaften des nachgiebigen Elektrodenträgers können mithilfe der FE-Methode sehr gut abgebildet werden, während für die Synthese seiner Geometrie das analytische Modell besser geeignet ist. Für die analytische Modellierung wird die Theorie gekrümmter Stäbe mit großen Verformungen und linearen Materialeigenschaften [7] verwendet. Da die Dehnung im Elektrodenträger über seine Länge nahezu gleichmäßig verteilt ist, kann jeweils ein E-Modul und dementsprechend lineare Materialeigenschaften für die einzelnen Druckbereiche angenommen werden. Diese E-Moduln für die einzelnen Druckbereiche werden anhand beider Modelle, des FE-Modells und des analytischen Modells, für eine Testgeometrie gefunden. Danach wird anhand des analytischen Modells die Geometrie des neuen Elektrodenträgers ermittelt ([8]). Der beschriebene modellbasierte Entwicklungsweg des Elektrodenträgers ist im Bild 4 dargestellt.

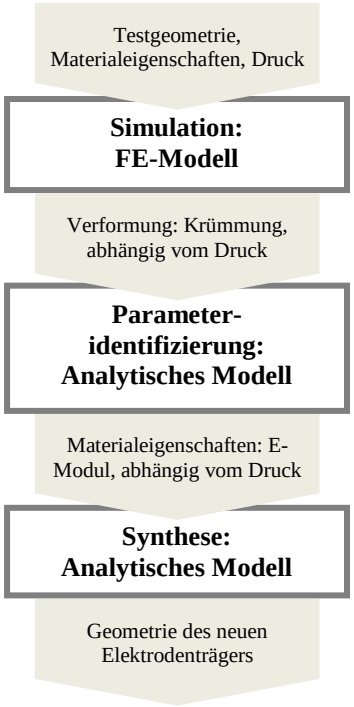


Bild 4 Methode zur modellbasierten Synthese für die Entwicklung der Geometrie des Elektrodenträgers

3.1 Simulation und Parameteridentifizierung

Zur Ermittlung des Elastizitätsmoduls wird eine einfache Testgeometrie, ein hohler zylindrischer einseitig geschlossener Stab mit einem eingebetteten Faden, gewählt und deren Verformung mittels FE-Methode beschrieben.
Für die Berechnung der Stabverformung im FE-Modell wurden die realen Materialeigenschaften des später verwendeten Silikons mit Hilfe des nichtlinearen Materialgesetzes, Ogden 3. Ordnung, abgebildet. Diesem lagen Messdaten aus gemittelten Kurven von durchgeführten uniaxialen, pure shear und biaxialen Zugversuchen zu Grunde. Es wurden jeweils die jungfräulichen Belastungskurven verwendet.
Der Stab besitzt eine einfache gerade Form mit Abmessungen, die den Abmessungen des zu entwickelnden Elektrodenträgers ungefähr entsprechen, d.h. seine Länge und sein Außendurchmesser erlauben eine kontaktlose Lage in der Cochlea mit einem minimalen Abstand von 0,3 mm zu deren Wänden. Dabei wird ein geometrisch ähnliches System – Cochlea und ein Elektrodenträger – im Maßstab 3:1 betrachtet, damit die theoretisch erlangten Ergebnisse und die experimentellen Untersuchungen untereinander unkompliziert verglichen werden können. Der zylinderförmige Stab mit einer Länge von 35 mm und einem Außenradius von r=0,75 mm besitzt einen zylinderförmigen Hohlraum mit dem Radius r_i=0,3 mm (Bild 5a). Der Formgebungsfaden ist im Abstand h=0,66 mm von der Stabachse in die Wand des Stabes eingebettet und verläuft parallel zu dieser.

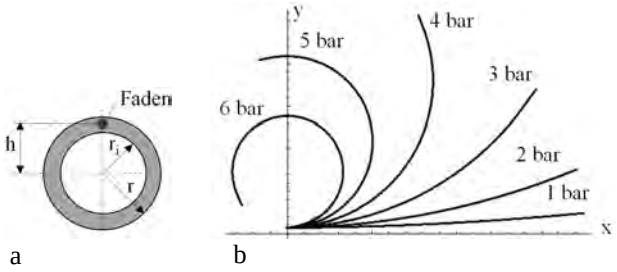


Bild 5 a: Querschnitt des Stabes (Testgeometrie), b: Verformung des Fadens im Stab nach FE-Modell unter Druck mit Werten von 1 bar bis 6 bar

Mit Hilfe eines FE-Modells wird die Verformung dieses Stabes unter Druck mit Werten $p_k=p_{k-1}+1$ bar, von 1 bar bis 6 bar, simuliert. Die erhaltenen Formen des Stabes, die durch den Formgebungsfaden im Bild 5b dargestellt sind, bilden Kreisbögen und weisen jeweils eine nahezu konstante Krümmung κ_k, k=1,..,6, auf. Anhand dieser ermittelten Krümmungen werden die spezifischen E-Moduln, E_k, k=1,..,6, die nur für den jeweiligen Druck gelten, berechnet. Dabei wird eine analytische Methode, die Theorie der gekrümmten Stäbe für große Verformungen [7], verwendet:

$$E_k = \frac{4R_k h p_k r_i^2}{r^4 - r_i^4 + 4h^2(r^2 - r_i^2)} \qquad (1)$$

Ein vom Druck abhängiger E-Modul, welcher durch gerade Verbindungen aus den berechneten E-Moduln (Gleichung (1)) zusammengesetzt ist (Bild 6), wird im analytischen Modell verwendet.

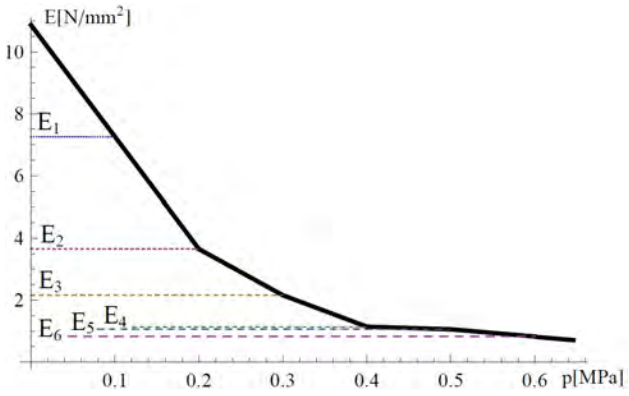


Bild 6 E-Moduln in Abhängigkeit vom Druck

Für die Synthese des Elektrodenträgers wird nur der gewundene Teil der Cochlea betrachtet. Dieser wird anhand von 18 Radien R_{Cj}, j=1,..,18, welche die Cochlea-Innenwand beschreiben, vorgegeben. Die Außenwand ist an der engsten Stelle, am Ende der Cochlea, 3,3 mm von der Innenwand entfernt (Bild 7).

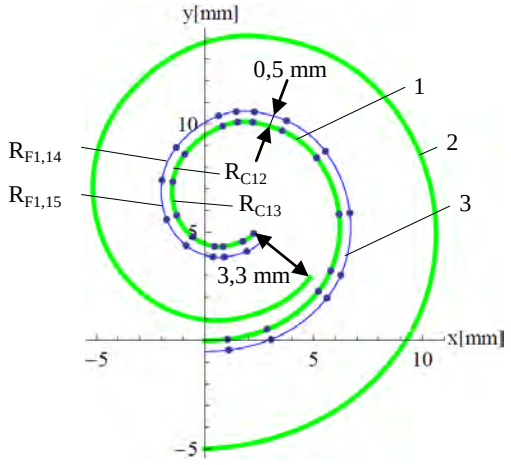


Bild 7 Der gewundene Teil der Cochlea und der Formgebungsfaden für die zu erzielende Lage des Elektrodenträgers: 1 – Innenwand der Cochlea, dargestellt durch 18 Radien R_{Cj}, j=1,..,18; 2 – Außenwand der Cochlea; 3 – Formgebungsfaden des Elektrodenträgers, dargestellt durch 18 Radien $R_{F1,j}$, j=1,..,18

Der Druck von 6 bar wird als maximaler Druck angenommen, unter welchem ein Elektrodenträger beaufschlagt werden darf.

3.2 Synthese eines geraden Elektrodenträgers

Zunächst wird ein im drucklosen Zustand gerader Elektrodenträger betrachtet (vgl. Bild 3a). Das Kriterium für die Entwicklung der neuen Form des Elektrodenträgers besteht darin, dass dieser unter dem Druck von 6 bar den gewundenen Teil der Cochlea über die ganze Länge nachbilden soll. Die gewünschte Form des verformten Formgebungsfadens, welcher auch eine neutrale Faser des Stabes darstellt, wird mit einem Abstand von 0,5 mm von der Innenwand der Cochlea gewählt und durch R_{Cj} ermittelt (Bild 7). Es ergeben sich die Radien $R_{F1,j}$, i=1,..,18, und die Länge l_1=30,5 mm für den gewünschten Formgebungsfaden. Mit dem Druck von p_6=6 bar und dem E-Modul E_6 soll der Elektrodenträger diese gewünschte Form exakt wiederholen.

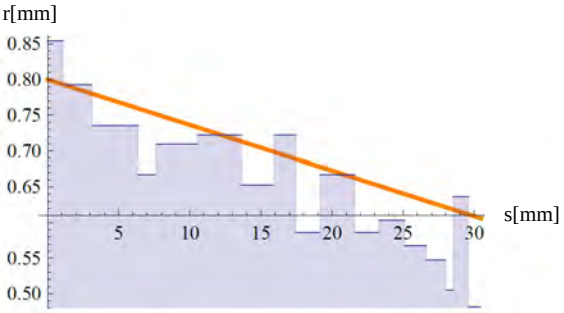


Bild 8 Darstellung der Ergebnisse für r_j, nach Gleichung (2), als eine stufenförmige Außengeometrie des Elektrodenträgers und eine über Regression ermittelte Gerade (orange) für eine konische Form des Elektrodenträgers

Es wird ein konstanter Radius des Hohlraumes r_i=0,3 mm und ein konstanter Abstand des Fadens von der Stabachse h_E=0,55 mm frei gewählt. Gesucht wird der Außenradius des neuen Elektrodenträgers, bestehend aus einer Reihe der Radien r_j, j=1,..,18. Hierfür wird ebenfalls die Theorie der gekrümmten Stäbe verwendet [7]:

$$r_j = \left(\left(\frac{4h_E p_6 R_{F1,j} r_i^2}{E_6} + r_i^2 (r_i^2 + 4h_E^2) + 4h_E^4 \right)^{0.5} - 2h_E^2 \right)^{0.5} . \quad (2)$$

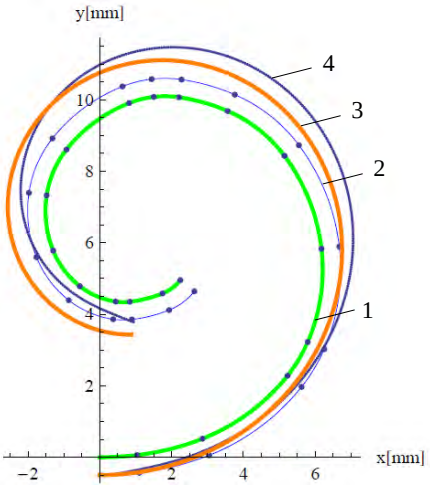


Bild 9 Darstellung der Kurven für: 1 – Innenwand des gewundenen Teils der Cochlea mit R_{Cj}, j=1,..,18, die durch Punkte abgegrenzt sind; 2 – gewünschte Kurve für den Formgebungsfaden des Elektrodenträgers mit $R_{F1,j}$, j=1,..,18 in seiner Endlage; 3 – berechnete Form des Formgebungsfadens für den konisch geformten Elektrodenträger anhand des analytischen Modells; 4 – berechnete Form des Formgebungsfadens für den konisch geformten Elektrodenträger mittels des FE-Modells

Die zusammengesetzten Radien r_j, j=1,..,18 (Bild 8) bilden den Außenradius des Elektrodenträgers r entlang der Koordinate s des Formgebungsfadens und stellen eine stufenförmige Außengeometrie des Elektrodenträgers dar,

die sehr ungünstig für die Fertigung und für die Insertion ist. Deshalb wird diese mit einer Geraden approximiert, wodurch eine konische Form des Elektrodenträgers entsteht (Bild 8).
Als eine approximierte Kurve kann eine beliebige Kurve statt einer Geraden gewählt werden, dementsprechend wird eine andere Außengeometrie des Elektrodenträgers entstehen.
Der maximale Radius r am Ansatz des konisch geformten Elektrodenträgers beträgt 0,8 mm und sein Radius an der Spitze ist 0,6 mm (gerundete Werte). Mit diesen Werten ahmt der neue Elektrodenträger die gewünschte Form des Fadens unter der Wirkung des Druckes von 6 bar nicht mehr exakt nach (vgl. Bild 9).
Der maximale Abstand zwischen dem Faden des konischen Elektrodenträgers (3) und dem Faden in seiner gewünschten Form (2), gemessen orthogonal zu Letzterem (2), liegt unter 0,7 mm. Damit ergibt sich eine Abweichung von weniger als 2,5% bezogen auf die Länge des Elektrodenträgers und ca. 20% bezüglich der kleinsten Querschnittsabmessung der Cochlea (3,3 mm, vgl. Bild 7), was als akzeptabel betrachtet wird.

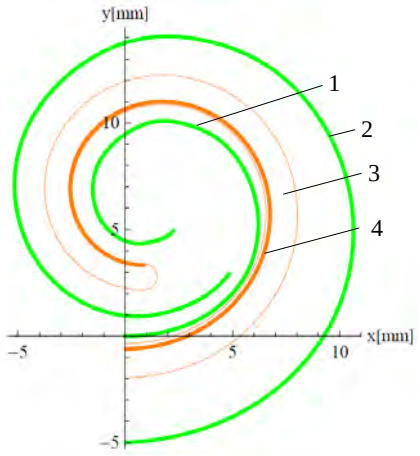


Bild 10 Die Lage des Elektrodenträgers unter Innendruck von 6 bar im gewundenen Teil der Cochlea nach analytischem Modell: 1 – Innenwand der Cochlea; 2 – Außenwand der Cochlea; 3 – neuer Elektrodenträger; 4 – Formgebungsfaden des Elektrodenträgers

Eine Validierung des analytischen Modells anhand der FE-Methode ergibt einen gemessenen Abstand zwischen den Kurven (3) und (4) von unter 0,6 mm (entspricht: unter 2% der Länge des Elektrodenträgers und 18% bezogen auf die kleinste Querschnittsabmessung der Cochlea) und ist in Bild 9 gezeigt. Die Lage des über das analytische Modell berechneten Elektrodenträgers mit einem Innendruck von 6 bar, innerhalb der Cochlea, ist im Bild 10 gezeigt.

3.3 Synthese eines gekrümmten Elektrodenträgers

Ein drucklos gekrümmter Elektrodenträger soll unter dem Innendruck von 6 bar eine gerade Form bilden und im drucklosen Zustand die Cochleaform wiederholen, damit der Elektrodenträger vorteilhaft drucklos im Innenohr verbleiben kann. Entsprechend dieser Kriterien soll der gekrümmte Elektrodenträger über das analytische Modell ausgelegt werden. Der Formgebungsfaden muss funktionsbedingt in die Wandseite des Elektrodenträgers, die weniger Dehnung erfahren soll (vgl. Bild 3b), eingebettet werden. Der senkrechte Abstand zwischen dem Formgebungsfaden und der Cochlea-Innenwand wird auf 1,8 mm angenommen (vgl. Bild 12). Somit entsteht eine gewünschte Form des Formgebungsfadens, die auch für die gekrümmte Form des Elektrodenträgers übernommen und durch die Krümmungsradien $R_{F2,j}$ beschrieben wird. Diese zusammengesetzten Radien werden mit R_{F2} bezeichnet und ergeben eine Länge des Elektrodenträgers von l_2=39,8 mm. Andere Parameter, wie der Radius des Hohlraumes r_i, der Abstand des Formgebungsfadens von der Stabachse h_E sowie die spezifischen E-Moduln, E_k, k=1,..,6, bleiben unverändert (Bild 6).
Um ein Ergebnis als eine stufenförmige Geometrie vom Außenradius r des Elektrodenträgers zu vermeiden, wird die Form des gewünschten Formgebungsfadens anhand eines Polynoms approximiert. Anhand des Krümmungsradius R_{F2} wird zunächst der Tangentenwinkel θ des Formgebungsfadens ermittelt:

$$\frac{d\theta(s)}{ds} = \frac{1}{R_{F2}}, \quad \theta(0) = 0 . \tag{3}$$

Der Winkel θ ist in Bild 11 dargestellt und wird durch ein Polynom dritter Ordnung approximiert:

$$\theta_A(s) = 1{,}12 \times 10 s + 1{,}33 \times 10^{-3} s^2 + 5{,}57 \times 10^{-6} s^3 . \tag{4}$$

Mithilfe dieses approximierten Tangentenwinkels θ_A können Koordinaten des Formgebungsfadens ermittelt werden:

$$\frac{dx(s)}{ds} = \cos\theta_A(s), \quad x(0) = 0, \qquad \frac{dy(s)}{ds} = \sin\theta_A(s), \quad y(0) = 0. \tag{5}$$

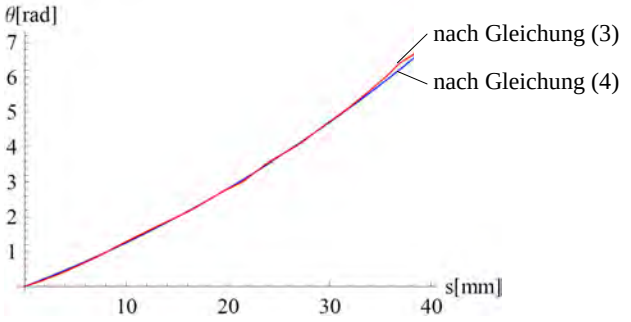


Bild 11 Der Tangentenwinkel θ des Formgebungsfadens nach Gleichung (3) und die Approximation θ_A durch ein Polynom dritter Ordnung nach Gleichung (4)

Infolge der Approximation entsteht eine von der gewünschten Form abweichende Kurve (maximale Abweichung von ca. 2,5 mm) für den Formgebungsfaden (vgl. Bild 12). Diese Kurve ist aufgrund ihrer geringen maximalen Abweichung und ihres gewählten Ordnungsgrades für die folgenden Berechnungen vorteilhaft, da sie beim weiteren Verlauf der Berechnung einen stetigen Verlauf

für den Außenradius des Elektrodenträgers erzeugt. Aus der Bedingung, dass unter Innendruck von 6 bar eine gerade Form des Elektrodenträgers entstehen soll, lässt sich sein Außenradius berechnen [7]:

$$r = \left(\left(\frac{4h_E p_6 R_{FA} r_i^2}{E_6} + r_i^2 (r_i^2 + 4h_E^2) + 4h_E^4 \right)^{0.5} - 2h_E^2 \right)^{0.5} . \quad (6)$$

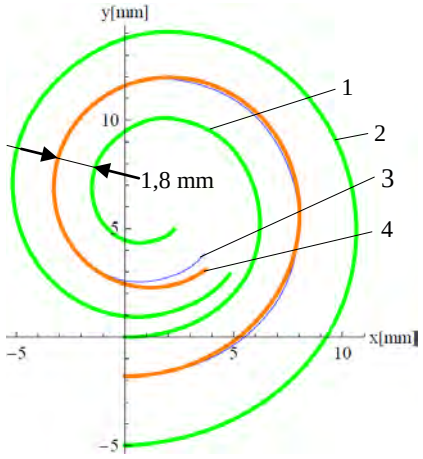


Bild 12 Darstellung der Kurven für: 1 – Innenwand der Cochlea; 2 – Außenwand der Cochlea; 3 – gewünschte Kurve für den Formgebungsfaden des Elektrodenträgers mit $R_{F2,j}$, j=1,..,18; 4 – approximierte Kurve für den Formgebungsfaden des Elektrodenträgers, siehe Gleichungen (5)

Der Krümmungsradius R_{FA} wird durch den Winkel θ_A ermittelt:

$$\frac{1}{R_{FA}} = \frac{d\theta_A(s)}{ds} . \quad (7)$$

Die Lösung der Gleichung (6) ist in Bild 13 dargestellt und weist eine stetige Abhängigkeit von s auf. Ein Elektrodenträger mit diesem Außenradius wird unter dem Innendruck von 6 bar, ausgehend von der drucklosen Form (4) aus Bild 12, eine exakte Gerade bilden. Dennoch kann auch hier eine konische Form des Elektrodenträgers angestrebt werden, wonach das Ergebnis für den Außenradius durch eine Gerade angenähert wird (Bild 13).

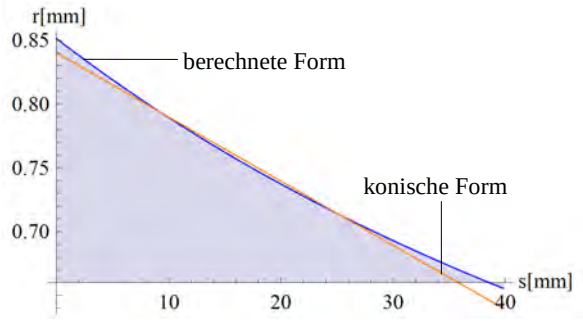


Bild 13 Darstellung der Ergebnisse für r nach Gleichung (6) und eine über Regression ermittelte Gerade (orange) für eine konische Form des Elektrodenträgers

Dabei entsteht der Außenradius des neuen Elektrodenträgers, welcher sich linear von 0,84 mm am Ansatz bis 0,64 mm (gerundete Werte) an seiner Spitze verändert. Infolge dieser Annäherung wird der Elektrodenträger keine exakte gerade Form unter dem Innendruck von 6 bar annehmen, sondern eine leicht gekrümmte Form. Bild 14 demonstriert eine gekrümmte drucklose Form des Elektrodenträgers (2) mit seinem Formgebungsfaden (3) und eine nahezu gerade Form (4) unter Innendruck von 6 bar, die für eine Insertion geeignet ist.

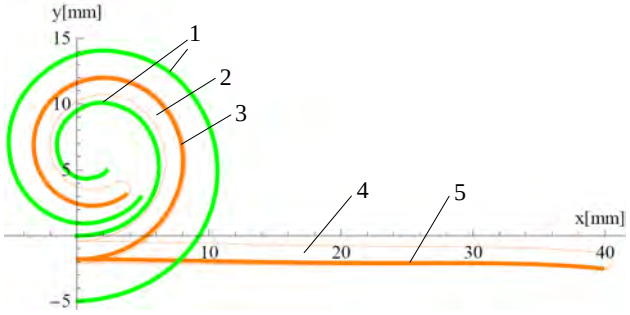


Bild 14 Der gekrümmte Elektrodenträger (2) mit einem Formgebungsfaden (3) im drucklosen Zustand in der gewundenen Form der Cochlea (1) und eine nahezu gerade Form des Elektrodenträgers (4) mit dem entsprechenden Formgebungsfaden (5) unter dem Innendruck von 6 bar

4 Gerades Funktionsmuster eines Elektrodenträgers

Ein erstes Funktionsmuster, das im drucklosen Zustand gerade ist (vgl. Bild 15a), wurde aufgebaut und seine Verformung unter steigendem Innendruck qualitativ untersucht. Das Funktionsmuster ist im Stande unter steigendem Innendruck (vgl. Bild15b-e) die Krümmung der Cochlea im Maßstab 3:1 nachzubilden.

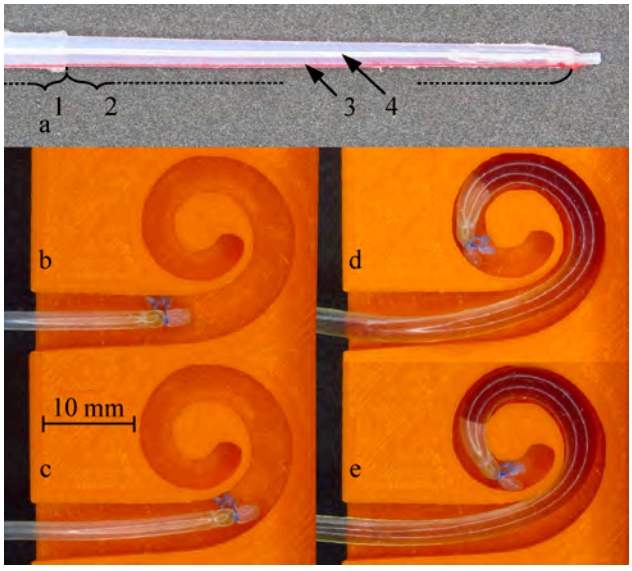


Bild 15 Funktionsmuster des Elektrodenträgers: a nach der Fertigung im drucklosen Ausgangszustand: 1 – zylindrischer Teil, 2 – konischer Teil, 3 – eingebetteter Formgebungsfaden, 4 – zylindrischer Hohlraum; b-e unter steigendem inneren Druck mit steigender Einführtiefe in eine Cochleaform

Das Funktionsmuster wurde über ein Formwerkzeug mit Hilfe des Spritzgießverfahrens aus dem Silikon Elastosil ® Vario 40 (Wacker Chemie AG, München, Deutschland) hergestellt. In das Formwerkzeug werden vor der Befüllung ein Formgebungsfaden und Bauteile, die den Hohlraum erzeugen eingeführt. Als Grundlage für die aus Kunststoff gefertigte Cochleaform im Maßstab 3:1 wurde ein CAD-Datensatz verwendet, dessen geometrische Abmessungen an den Maßen eines mittleren, humanen Innenohrs orientiert sind.

5 Zusammenfassung

Mit dem Ziel der Minimierung von Schäden an der Basilarmembran wurden fluidisch aktuierte Elektrodenträger mit veränderbarer Krümmung für die Anwendung im Cochlea-Implantat vorgestellt. Zwei mögliche Varianten des Elektrodenträgers wurden in Betracht gezogen: mit einer geraden und einer gekrümmten Form im drucklosen Zustand. Die zweite Variante hat den Vorteil, dass eine gezielte drucklose Endlage des CI-Elektrodenträgers nach der Insertion bestehen bleibt.

Es wurde gezeigt, dass eine modellbasierte Synthese solcher Systeme unter Kombination der FE-Methode und der Theorie gekrümmter Stäbe für große Verformungen möglich ist. Es wurden für zwei vorgestellte Varianten der Elektrodenträger Abmessungen ermittelt, welche deren Anwendung unter dem Innendruck von 6 bar erlauben. Eine Validierung des mathematischen Modells anhand der FE-Methode ergibt einen Unterschied von unter 2% bezogen auf die Länge des Systems bzw. Elektrodenträgers und ca. 18% bezogen auf die kleinste Querschnittsabmessung der Cochlea. Die Entwicklung und die Untersuchungen des Systems wurden für einen Elektrodenträger im Maßstab 3:1 durchgeführt, um eine experimentelle Verifizierung zu erleichtern. Ein erster Funktionsdemonstrator wurde aufgebaut und seine Verformung unter variierendem Innendruck qualitativ untersucht. Das Funktionsmuster ist im Stande, die Krümmung der Cochlea 3:1 nachzubilden. In weiteren Arbeiten werden neben den geraden auch gekrümmte Elektrodenträger gefertigt. Weiterhin werden beide Varianten einer quantitativen messtechnischen Untersuchung unterworfen.

Die beschriebenen Systeme können ihre Krümmung und gleichzeitig ihre Steifigkeit durch den Innendruck verändern. In Abhängigkeit von der gewählten Variante (eine gerade oder eine gekrümmte Form im drucklosen Zustand) steigt oder fällt die Steifigkeit des Systems mit Zunahme seiner Krümmung. Derartige Eigenschaften können auch für andere chirurgische Instrumentarien in der Medizintechnik angewendet werden.

Die Autoren bedanken sich für die finanzielle Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft (ZE 714/9-1, MA 4038/9-1).

6 Literatur

[1] Biedron, S., Westhofen, M., Ilgner, J.: On the Number of Turns in Human Cochleae; Otology & Neurotology, Vol. 30, No 3, 2009

[2] Erixon, E., Högstorp, H., Wadinanf, K., Rask-Andersen, H.: Variational Anatomy of the Human Cochlea; Implications for Cochlear Implantation: Otology & Neurotology, Vol. 30, No. 1, pp.14-22, 2009

[3] Majdani, O., Lenarz, T., Pawsey, N., Risi, F., Sedlmayr, G., Rau, Th. S.: First results with a Prototype of a new Cochlear Implant Electrode featuring Shape Memory Effect; Biomed Tech 2013; 58; doi: 10.1515/bmt-2013-4002

[4] Rau, Th. S., Würfel, W., Lenarz, Th. and Majdani, O.: Three-dimensional histological specimen preparation for accurate imaging and spatial reconstruction of the middle and inner ear; International Journal of Computer Assisted Radiology and Surgery (Int J CARS), Vol. 8, pp. 481-509, 2013

[5] Zentner, L.: Mathematical Synthesys of Compliant Mechanism as Cochlear Implant; Mikromechanics and Microactuators, Springer; Editors: Ananthasurech, Corves, Petuya; ISBN 978-94-007-2720-5; 2012

[6] Zentner, L., Keskeny, J., Westhofen, M., A. Huba: Hydraulic Actuation for the Navigation of a Cochlear Implant, 10th International Conference on New Actuators „Actuator 2006", Bremen, June 2006

[7] Zentner, L.: Nachgiebige Mechanismen; DE GRUYTER, ISBN 978-3-486-76881-7

[8] Zentner, L., Issa M., Hügl, S., Griebel, S., Rau, T. S., Majdani O.: Compliant Mechanism with Hydraulic Activation Used for Implants and Medical Instruments; XII Inter-national SAUM Conference on Systems, Automatic Control and Measurements Niš, Serbia, November 12th-14th, 2014

[9] Seldon, H.L., Dahm, M.C., Clark, G.M., Crowe, S.: Silastic with polyacrylic acid filler: swelling properties, biocompatibility and potential use in cochlear implants.Biomaterials. 1994 Nov;15(14):1161-9.

[10] Clark, J. R., Leon, L., Warren, F. M., & Abbott, J. J. (2012). Magnetic Guidance of Cochlear Implants: Proof-of-Concept and Initial Feasibility Study. Journal of Medical Devices, 6(3), 035002.

Vergleich nichtlinearer Schaltfunktionen für Gleitzustandsregler am Beispiel hydraulischer Wegeventile

Comparison of Nonlinear Switching Function for Sliding Mode Control of Hydraulic Solenoid Valves

Christoph Krimpmann, Torsten Bertram, TU Dortmund, Lehrstuhl für Regelungssystemtechnik, 44227 Dortmund, Deutschland
Georg Schoppel, Ingo Glowatzky, Bosch Rexroth AG, 97816 Lohr am Main, Deutschland

Kurzfassung

Dieser Beitrag präsentiert einen neuen Ansatz zur Positionsregelung hydraulischer Wegeventile basierend auf dem Prinzip der Gleitzustandsregelung. Es werden zunächst die Eigenschaften linearer Schaltfunktionen diskutiert, um darauf aufbauend die Notwendigkeit nichtlinearer Schaltfunktionen für praktische Anwendungen aufzuzeigen. Ein bekannter Ansatz aus der Literatur wird diskutiert und eine neue Methode präsentiert, die eine neue regelungstechnische Formulierung bietet und somit von Prozessexperten intuitiv parametrisiert und bewertet werden kann. Es wird in dieser Arbeit weiterhin die Parametrisierung der Regler durch evolutionäre Hardware-in-the-Loop Optimierung vorgestellt und geeignete Gütemaße diskutiert, um daran anschließend die Unterschiede im Systemverhalten anhand von Sprungantworten zu diskutieren.

Abstract

This paper presents a novel approach for the position control of hydraulic solenoid valves based on the sliding mode principle. Initially, the properties of linear switching functions will be discussed to clarify the necessity of nonlinear sliding surfaces for practical control applications. Therefore one approach from literature will be presented and a new formalism is introduced, that is easily interpretable by means of the closed loop system dynamics. The systems parameters are identified by optimizing the closed loop step responses of a hydraulic valve in a hardware-in-the-loop multi objective evolutionary optimization scheme. The properties of the given methods are depicted and discussed based on the step responses as well as the phase trajectories.

1 Einleitung

Die Regelung hydraulischer Wegeventile ist aufgrund von technischen und auch nichttechnischen Anforderungen eine anspruchsvolle Aufgabe. In solchen Ventilen wird der Volumenstrom des hydraulischen Fluids durch den Kolben, der sich innerhalb des Ventilkörpers bewegt, gesteuert. Der Kolben selbst wird durch zwei gegeneinander wirkende Elektromagneten in seiner Position geregelt. Den Magneten wirken zwei Regelfedern entgegen, die den Kolben im hydraulischen Nullpunkt zentrieren, falls die Magnete nicht bestromt werden. Innerhalb der Ventile wirken weiterhin Haft- und Gleitreibung, die ebenso wie die magnetische Hysterese und Wirbelstromeffekte innerhalb der magnetischen Kreise zu berücksichtigen sind. Diese Eigenschaften stellen hohe Anforderungen an den Lageregler des Kolbens. Häufig wird die Kolbenposition hydraulischer Wegeventile durch eine Kombination eines PI-Reglers mit einer Zustandsrückführung geregelt [11]. Ein derartiger Regler verfügt über Nichtlinearitäten im P- und I-Zweig, um die Verstärkungen der einzelnen Zweige unabhängig voneinander für unterschiedliche Signalbereiche anzupassen. Diese Nichtlinearitäten führen zu einer hohen Anzahl von verkoppelten Parametern, die typischerweise im Rahmen des Reglerentwurfs manuell ausgelegt werden. Hierzu misst der Prozessexperte Sprungantworten verschiedener Sprunghöhen und variiert die Reglerparameter solange, bis das Systemverhalten seinen Anforderungen entspricht. Ein Ansatz zur Automatisierung wurde von Krettek et al. in [10, 12] vorgestellt. Da allerdings die Entwicklungs- und Inbetriebnahmezeiten und die damit einhergehenden Kosten einer immer restriktiveren Budgetierung unterliegen, ist ein Regler gefordert, der zum einen einfach zu parametrisieren ist und zum anderen somit bei reduzierter Komplexität eine gleiche Regelungsgüte wie bisher verwendete Regler bietet. Die Auslegung von Zustandsreglern erfolgt häufig methodisch anhand eines Streckenmodells. Da allerdings aus Sicht der Regelungstechnik kein ausreichendes Modell eines Wegeventils existiert, wird in diesem Fall ein Regler benötigt, der robust gegen Modellfehler und Störeinflüsse ist. Unter diesen Umständen erscheinen strukturvariable Regelungen sinnvoll, da sie die benötigte Robustheit aufweisen. In den folgenden Abschnitten wird auf die Entwicklung von strukturvariablen Gleitzustandsreglern eingegangen, sowie daraufhin der Entwurf nichtlinearer Schaltfunktionen betrachtet.

2 Grundlagen der Gleitzustandsregelung

Hydraulische Wegeventile werden traditionell mit analogen PID- sowie PI-Reglern in Verbindung mit Zustandsrückführungen geregelt [11], [8]. Um die benötigte Regelungsgüte zu erzielen, bedarf es nichtlinearer Verstärkungskennlinien in den P- und I-Zweigen des Reglers,

sodass für den Klein-, Mittel- und Großsignalbereich unterschiedliche Reglerverstärkungen realisiert werden können. Zusammen mit einer etwaigen Zustandsrückführung verfügen derartige Regler über etwa 25 bis 30 zum Teil verkoppelte Parameter, die es zu parametrisieren gilt. Die Parametrisierung ist ein zeitaufwändiger Vorgang, der zum Großteil auf den Erfahrungen des Prozessexperten basiert. Ziel dieses Beitrags ist es nun, den bestehenden, oben aufgezeigten Regler durch einen Neuentwurf zu ersetzen, der auf dem Prinzip der Gleitzustandsregelung aufbaut. Ein Vorteil dieses Ansatzes ist die Invarianz gegenüber dem Streckenmodell, bzw. dem Fehlen eines Streckenmodells, sodass für die Auslegung auf ein valides Streckenmodell verzichtet werden kann.

Im Folgenden wird ein nichtlineares SISO-System in Regelungsnormalform nach Gleichung (1) betrachtet, dessen n-dimensionaler Zustandsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und u die Stellgröße bekannt sind. Es sei ein Referenzzustandsvektor mit $x_d \in \mathbb{R}^n$ gegeben, sodass der Vektor $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d$ die Abweichung zwischen Referenz- und Ist-Zustand quantifiziert.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, \qquad i = 1,2,\ldots,n \\ \dot{x}_n &= f[\mathbf{x}(t)] + g[\mathbf{x}(t)]u(t) \end{aligned} \tag{1}$$

Weiterhin sei $S(t)$ eine Ebene im Zustandsraum, definiert durch die skalare Schaltfunktion $s(\mathbf{e}) = 0$. Hierbei ist die Schaltfunktion als gewichtete Summe der Abweichung der Zustände definiert (siehe Gleichung (2)). Durch die Stabilisierung von $s(\mathbf{e}) \to 0$ kann somit die n-dimensionale Folgeregelung $\mathbf{e} \to \mathbf{0}$ in ein Stabilisierungsproblem erster Ordnung überführt werden. Unter idealen Voraussetzungen wird dies durch das Stellgesetz in Gleichung (3) bewirkt.

$$s(\mathbf{e}) = \mathbf{r}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{e} \tag{2}$$

$$u_{SMC} = -L\,\mathrm{sign}\,(s(\mathbf{e})) \tag{3}$$

Befindet sich der Zustandspunkt $\mathbf{x}$ außerhalb der Zielmannigfaltigkeit $S(t)$, führt das Stellgesetz u_{SMC} das System in Richtung der Schaltebene. Diese Phase wird *Eintreffphase*, bzw. *Reaching Phase* bezeichnet. Die sich daran anschließende *Gleitzustandsphase*, bzw. *Sliding Mode* zeichnet sich dadurch aus, dass nun das System auf der Schaltebene $S(t)$ verharrt, bzw. gleitet. Innerhalb dieser Phase ist das System invariant gegenüber äußeren Störeinflüssen sowie Parameterunsicherheiten des Streckenmodells. Voraussetzungen hierfür sind zum einen die exakte Kenntnis der Ordnung der Regelstrecke, einschließlich der Sensor- und Aktor-Dynamik. Zum anderen benötigt das Stellgesetz aus (3) eine unendlich hohe Abtastfrequenz, um instantan Abweichungen des Systems von der Schaltebene zu kompensieren.
Unter praktischen Gesichtspunkten führen diese Anforderungen jedoch zu erheblichen Einschränkungen. Eine unendlich hohe Abtastfrequenz ist in der Natur der Sache als digitales Abtastsystem nicht zu realisieren und oftmals existiert kein ausreichendes Wissen über die Systemordnung der verwendeten Sensoren und Aktoren, bzw. durch das harte Umschalten werden Systemzustände derart stark angeregt, dass sie im Vergleich zu einem kontinuierlichen Stellgesetz nicht weiter in einer approximativen Ordnungsreduktion vernachlässigt werden können. Die genannten Einflüsse führen dazu, dass der Gleitzustand nicht aufrecht erhalten werden kann. Das kennzeichnet sich darin, dass die Regelgröße zu schwingen beginnt. In diesem Fall wird typischerweise vom *Rattern* derer gesprochen. Wie unter anderem von J. Komsta in [9] und von H. Brandtstädter in [4] diskutiert, existiert eine Vielzahl an Verfahren zur Kompensation des Ratterns. Die vielfach diskutierte Aufweichung der Signumfunktion [6, 17, 19] führt zwar zu einer Reduktion des Ratterns, indem die Signumfunktion durch eine Sättigungsfunktion ersetzt wird. Jedoch wird zeitgleich in Kauf genommen, dass kein echtes Gleiten mehr stattfindet. Die Verwendung der Sättigungsfunktion führt dazu, dass sich das System lediglich in einem Band um die Schaltebene herum bewegt. Hierbei ergeben sich Schwingungen unbekannter Amplitude sowie Frequenz in der Schaltfunktion $s(\mathbf{e})$, die auf die Stellgröße u propagieren und sich somit wiederum auf die Regelungsgröße auswirken, was zu einer Reduktion der Reglergüte führt. Wie Bartolini et al. in [1] diskutiert, ist es sinnvoll, anstatt einer Aufweichung der Signumfunktion einen Gleitzustandsregler höherer Ordnung zu verwenden. Ein solcher Ansatz verfolgt sowohl die Stabilisierung der Schaltfunktion $s(\mathbf{e}) \to 0$ sowie deren Ableitungen $\dot{s} = \cdots = s^{(n)} \to 0$. Eine vollständige Diskussion dieser Methode wird von A. Levant in [13, 15] geführt. Die benötigte Kenntnis über die Ableitungen der Schaltfunktion $s(\mathbf{e})$ stellt in der Praxis allerdings ein ernstzunehmendes Hindernis dar, da sie in der Regel durch Differentiation der Schaltfunktion numerisch bestimmt werden müssen. Zur Kompensation dieses augenscheinlichen Nachteils bietet sich somit der zu der Klasse der Gleitzustandsregler zweiter Ordnung gehörende Super-Twisting-Algorithmus [13, 14] an, der auf die Ableitung der Schaltfunktion verzichten kann. Für diese Arbeit wird nun allerdings die in (4) verwendete Formulierung nach Shtessel et al. [16] verwendet, die eine erhöhte Glattheit in der Stellgrößenänderung $\dot{u}$ erzielt.

$$u_{STA} = -\alpha_1 \sqrt{|s|}\,\mathrm{sign}\,(s) - \alpha_0 \int \sqrt[3]{|s|}\,\mathrm{sign}\,(s)\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

Die freien Designparameter in vorstehender Gleichung sind α_0 und α_1. Wie unschwer zu erkennen ist, weisen sowohl der Proportional- und Integralanteil des Stellgesetzes entgegen zu (3) keine Diskontinuitäten mehr auf, sodass ein kontinuierliches Stellgesetz realisiert ist. Der Konvergenzbeweis für (4) kann ebenfalls [16] entnommen werden.

3 Design nichtlinearer Schaltfunktionen

Während das oben diskutierte Stellgesetz lediglich die Glattheit der Regelgröße beeinflusst, wird die Dynamik des geschlossenen Regelkreises maßgeblich durch die Wahl einer geeigneten Schaltfunktion bestimmt. Wie bereits in (2)

gezeigt, lässt sich die Schaltfunktion als lineare Gewichtung der Zustände definieren. Durch Ausnutzung der Regelungsnormalform sowie Auflösung des Vektor-Produkts lässt sich die Schaltfunktion nun wie folgt umformulieren:

$$\begin{aligned} s(e) &= r_0\, e + r_1\, \dot{e} + \cdots + e^{(n-1)} \\ r_0, \cdots, r_{n-2} &> 1, \quad r_{n-1} = 1 \end{aligned} \tag{5}$$

Die hier gewählte Formulierung der Schaltfunktion hat nun für den Fall, dass sich das System im Gleitzustand $s(e) = 0$ befindet, die Form einer homogenen Differenzialgleichung $(n-1)$-ter Ordnung des Regelfehlers e. Somit ist zu erkennen, dass die Dynamik des Systems im Gleitzustand ausschließlich über die Parameter der Schaltfunktion definiert wird und das System eine Robustheit gegenüber Störungen sowie Parametervariationen bietet. Die lineare Systemdynamik ist unter praktischen Gesichtspunkten jedoch oftmals nachteilig, da eine nichtlineare Dynamik das Folge- und Konvergenzverhalten beschleunigt. Choi et al. zeigen einen Ansatz zur gesteuerten Variation der Schaltfunktion [5]. Hierbei wird die Schaltebene zu Beginn so geneigt, dass sie durch den Anfangszustand verläuft, und anschließend wird sie schrittweise verändert, um so eine beschleunigte Konvergenz zu erzielen. Wie allerdings von Bartoszewicz in [3] diskutiert wird, wird in jeder Iteration die Schaltebene sprunghaft verschoben, sodass sich das System nicht weiter im Gleitzustand befindet und die Invarianz gegenüber Störungen sowie an Robustheit des Reglers verliert. Eine zeit-optimale Adaption der Schaltfunktion, die die Nachteile des Ansatzes von Choi et al. kompensiert, wird in [2] präsentiert, allerdings wird hierfür ein nominelles Streckenmodell benötigt. Da ein valides Modell für diese Arbeit jedoch nicht vorliegt, kann daher ein modellbasierter Adaptionsansatz linearer Schaltfunktionen nicht weiter verfolgt werden, sodass im Folgenden modellfreie Ansätze diskutiert werden.

3.1 Superposition orthogonaler Schaltebenen

Ein Ansatz basierend auf der Superposition zweier Schaltebenen wird von Tokat et al. in [18] präsentiert. Hierbei wird zusätzlich zur Schaltebene $s(\mathbf{e})$ aus (2) ihre Orthogonale $p(\mathbf{e})$ verwendet. Somit müssen die Parameter h_i die Orthogonalitätsbedingung aus (7) erfüllen.

$$p(\mathbf{e}) = \mathbf{h}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{e} \tag{6}$$

$$\mathbf{r}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{h} = 0 \tag{7}$$

Die resultierende Schaltfunktion $s_p(\mathbf{e})$ ergibt sich somit aus dem gewichteten Quadrat der orthogonalen Funktion $p(\mathbf{e})$ und der ursprünglichen Schaltfunkton $s(\mathbf{e})$.

$$s_p(\mathbf{e}) = s(\mathbf{e}) - k_s\, p^2(\mathbf{e}) \tag{8}$$

Die hier skizzierten Zusammenhänge sind zusätzlich am Beispiel eines Systems zweiter Ordnung in **Abbildung 1** dargestellt. Wie in der Grafik zu erkennen ist, besteht die Möglichkeit einer Fehlparametrisierung der Schaltfunktion durch die Wahl zu großer Werte des Gewichtungsfaktors k_s. Ebenso ist zu erkennen, dass es sich bei der dargestellten Schaltfunktion $s_p(\mathbf{e}) = 0$ nicht um einen monoton fallenden Verlauf handelt. In den äußeren Bereichen krümmt sich die Funktion in Richtung Ordinate, sodass ein System, das an der Schaltfunktion entlanggleitet in eine Ruhelage mit statischem Regelfehler überführt wird.

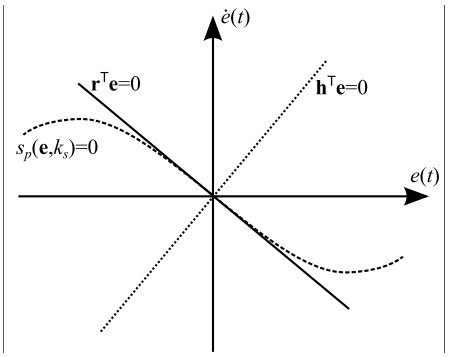


Bild 1 Schaltfunktion für ein System zweiter Ordnung nach Tokat et al. [18]

Zur Vermeidung dieses Effekts und garantierter Konvergenz in die Ruhelage $\mathbf{e} \to \mathbf{0}$ führen Tokat et al. eine Abschätzung des maximal zulässigen Gewichtungsfaktors k_s basierend auf den Anfangswerten des generalisierten Regelfehlers $\mathbf{e}_0$ für eine sprungförmige Anregung basierend auf einem Streckenmodell durch. Zum einen soll in dieser Arbeit allerdings ein allgemeingültiger Regler, der sowohl Folgeregelungen, wie auch Festwertregelungen durchführt, entwickelt werden und dessen Parametrisierung keine zeitlichen Abhängigkeiten aufweisen. Zum anderen existiert kein regelungstechnisches Streckenmodell ausreichender Güte, das herangezogen werden kann. Daher gilt es, den Parameter k_s während der Auslegung auf anderem Wege zu bestimmen (siehe Abschnitt 4).

3.2 Variable Pole

Die in (1) gewählte Regelungsnormalform bietet wie bereits angedeutet den Vorteil, dass die Schaltfunktion $s(\mathbf{e})$ durch eine Umformulierung aus regelungstechnischer Sicht interpretierbar wird. Die in (9) gewählte Formulierung stellt somit die lineare Differenzialgleichung in Abhängigkeit des Regelfehlers e und der Pole λ_i des geschlossenen Regelkreises dar. Somit lässt sich a priori durch Wahl der Pole λ_i die Dynamik des Systems festlegen.

$$s(e) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \lambda_1\right) \cdots \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \lambda_{n-1}\right) e \tag{9}$$

Die freie Wahl der Pole bietet nun die Möglichkeit, diese zur Laufzeit anzupassen. Eine praktische Forderung an geregelte Systeme ist oftmals, dass sie kleine Regelabweichungen mit einer höheren Dynamik kompensieren, als es bei großen Regelabweichungen ohne Gefährdung der Stabilität möglich wäre. Somit ergibt sich die Bedingung, die Pole λ_i in Abhängigkeit des Regelfehlers zu skalieren. Ein pragmatischer Ansatz ist daher, eine Grunddynamik $\lambda_0 < 0$ vorzugeben und sie über eine Geradengleichung mit der Steigung $\Delta\lambda > 0$ in Abhängigkeit des Regelfehlers zu variieren. Um nun die Adaption aller Pole λ_i nicht getrennt voneinander vorzunehmen, ist es ausreichend, den domi-

nanten Pol $\lambda_1 = \max(\lambda_i)$ zu adaptieren, während alle weiteren Pole statisch an den dominanten Pol gekoppelt werden (siehe (10)).

$$\begin{aligned} \lambda_1(e) &= \Delta\lambda\,|e| + \lambda_0 \\ \lambda_i(e) &= c_i\,\lambda_1(e), \qquad i = [2,3,\ldots,n] \end{aligned} \tag{10}$$

Wie nun zu erkennen ist, ergibt sich somit eine erhöhte Dynamik für kleine Regelfehler und für große Auslenkungen eine reduzierte Dynamik, um die Stabilität des Systems nicht zu gefährden.

4 Optimierung der Reglerparameter

Die Optimierung (11) ist ein Prozess, dessen Ziel das Auffinden eines Parametervektors $\theta^\star$ ist, der eine gegebene (Vektor)-Gütefunktion $J(\theta)$ minimiert.

$$\theta^\star = \arg\min_{\theta}(J(\theta)) \tag{11}$$

Es bieten sich hierzu eine Vielzahl verschiedener Methoden an, deren Auswahl von der Beschaffenheit der Gütefunktion sowie der praktischen Anwendung abhängt. Da in diesem Beitrag die Optimierung von Sprungantworten beabsichtigt wird, stellt die Gütefunktion $J(\theta)$ ein rauschbehaftetes reales Hardware-Experiment dar. Zur Optimierung einer solchen Gütefunktion wird ein Verfahren benötigt, das robust gegen Rauschen ist und nicht den Gradienten der Gütefunktion $\nabla J(\theta)$ benötigt. Aus diesem Grund wird ein Evolutionärer Algorithmus (EA) verwendet, da er ein populationsbasiertes heuristisches Verwahren ist. Weiterhin werden in diesem Beitrag mehrere konfliktäre Kriterien zur Bewertung der Sprungantworten verwendet, die simultan zu minimieren sind. Somit ergibt sich ein multikriterielles Optimierungsproblem, für das keine einzelne Lösung, sondern vielmehr eine Menge an Lösungen existiert, die im Sinne der Pareto-Optimalität das Optimierungsproblem löst. Der hier genutzte NSGA-II Algorithmus [7] implementiert einen solchen Optimierer und wurde bereits vielfach im Kontext derartiger Experimente erfolgreich verwendet [10, 11, 12].

4.1 Bewertung der Sprungantworten

Bevor die Evaluierung der Sprungantworten durchgeführt werden kann, muss zunächst der Parametervektor θ definiert werden. Um eine möglichst hohe Dynamik zu erzielen, müssen die Parameter der Schaltfunktion $s(\mathbf{e})$ optimiert werden. Für eine lineare Schaltfunktion sind das die Parameter $r_0,\ r_1,\ \ldots,\ r_{n-2}$. Die Schaltfunktion aus (8) benötigt weiterhin den Faktor k_s. Die Parametrisierung der Schaltfunktion (10) erfolgt ausschließlich durch $\Delta\lambda$ und λ_0. Da das hier zugrunde liegende Beispiel auf einem Wegeventil beruht, dass sich hinreichend genau als System dritter Ordnung approximieren lässt, sind lediglich zwei Pole zu bestimmten, sodass sich nur ein Koppelfaktor c_2 ergibt, der a priori bestimmt wird. Die Parametrisierung des Super-Twisting Algorithmus erfolgt durch die Parameter α_0 und α_1. Somit ergeben sich vier Parameter für die lineare Schaltfunktion, wie auch für den neu vorgestellten Ansatz. Das Verfahren nach Tokat et al. benötigt fünf Parameter.

Die Auswahl der Kriterien zur Bewertung der Sprungantwort ist nicht derart intuitiv, wie die Wahl der Optimierungsparameter. Es gibt keine eindeutige Menge an Kriterien, die zur Bewertung herangezogen wird, vielmehr ergeben sich die Gütemaße aus den praktischen Forderungen der Prozessexperten, die das zu optimierende System entwickeln. Ein weit verbreitetes Maß zur Bestimmung der Geschwindigkeit des Systems ist die Auswertung der Anstiegszeit $T_{r,90\%}$, die den Zeitraum zwischen dem Führungsgrößensprung und dem erstmaligen Erreichen von 90 % der Führungsgröße durch die Regelgröße quantifiziert.

$$T_{r,90\%} = \min_{t}(|e(t)| \leq 0{,}1 \cdot e_0) \tag{12}$$

Zum Schutz exakter Leistungsdaten werden alle in dieser Arbeit gezeigten Anstiegszeiten $T_{r,90\%}$ basierend auf dem Maximalwert der Individuen aller Lösungsmengen normalisiert. Neben der geringen Reaktionszeit wird in der Regel ein geringer statischer Regelfehler gefordert. Hierzu wird der mittlere quadratische Regelfehler in der Ruhelage MSE_{RL} bestimmt. Es wird angenommen, dass die Ruhelage in den letzten 50 % der Sprungantwort erreicht ist.

$$MSE_{RL} = \frac{2}{N}\sum_{i=0,5N}^{N} e_i^2 \tag{13}$$

Ziel der Gleitzustandsregelung ist die Stabilisierung der Schaltfunktion $s(\mathbf{e}) \to 0$ und sie ist somit als Optimierungsproblem zu interpretieren. Solange die Schaltfunktion stabilisiert ist, befindet sich das System im Gleitzustand und folgt der extrinsischen Systemdynamik mit Invarianz gegen Störungen. Um nun die Gleitzustandsphase zu maximieren, kann der von der Schaltfunktion quantifizierte Unterschied von der Solldynamik basierend auf der mittleren quadratischen Abweichung bemessen werden.

$$MSE_{SF} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} s_i^2 \tag{14}$$

Der evolutionäre Algorithmus wird für 50 Generationen mit einer Populationsgröße von 50 Individuen ausgeführt. Hierbei wird die erste Generation an Individuen zufällig generiert, im Folgenden basierend auf einer *Plus*-Strategie weiterentwickelt und zudem parallel ein Elite-Pool von maximal 100 nicht dominierten Individuen aufgebaut, der ausschließlich für die finale Auswertung der erreichten Lösungen herangezogen wird. Während der Evolution werden alle Individuen am realen Wegeventil getestet und Sprungantworten aufgezeichnet, bei denen die Führungsgröße ausgehend von der Ruhelage $p = 0\,\%$ an die Ränder des Arbeitsbereich $p = \pm 100\,\%$ springt und nach kurzer Verweilzeit in die Ruhelage zurückfällt.

4.2 Aufbau des Experiments

Das hier verwendete Experiment lässt sich, wie in **Abbildung 2** dargestellt, in drei Teile gliedern. Der evolutionäre Algorithmus zur Parametrisierung der verwendeten Regler sowie die Bewertung der Sprungantworten sind in MAT-

LAB implementiert. Der Regler wird auf einem SIMULINK REAL-TIME System ausgeführt, das eine harte Echtzeit garantiert. Die Kommunikation zwischen PC und Echtzeitsystem erfolgt via Ethernet. Die Anbindung an das *4WRSEH6*-Wegeventil der Bosch Rexroth AG ist in analoger Form realisiert. Hierzu verfügt das Echtzeitsystem über Analog-Digital- sowie Digital-Analog-Wandler. Während der Optimierung zeichnet das Echtzeitsystem je Individuum eine Folge von vier Sprüngen auf und sendet sowohl das Positions-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungssignal, wie auch die Stell- und Führungsgröße an den PC zur Auswertung. Die Testdauer beträgt pro Individuum weniger als 4 Sekunden, sodass eine vollständige Optimierung nur wenige Stunden benötigt.

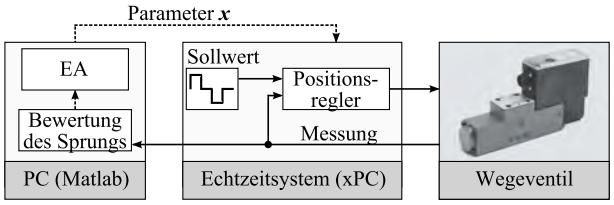


Bild 2 Aufbau des Hardware-in-the-Loop Experiments.

5 Diskussion der Methoden

Aus der Optimierung der unterschiedlichen Schaltfunktionen ergibt sich jeweils eine Pareto-optimale Menge an Lösungen, die in **Abbildung 3** dargestellt sind. Wie hier zu erkennen ist, erreichen beide Verfahren eine ähnlich gute Ruhelage, da für beide Verfahren ähnliche MSE_{RL} Werte erreicht worden sind. Für das Verfahren basierend auf der Superposition orthogonaler Schaltebenen nach Tokat et al. ist allerdings eine eindeutige Clusterbildung zu erkennen. Die Individuen mit längeren Anstiegszeiten weisen eine geringere Abweichung von der extrinsischen Dynamik auf, als die Individuen mit kurzen Anstiegszeiten. Es ist allerdings ebenfalls zu erkennen, dass das Verfahren basierend auf den variablen Polen für ähnliche Anstiegszeiten ein wesentlich verbessertes Gleitverhalten aufweist und somit der vorgegebenen Dynamik besser folgen kann. Zur weiteren Diskussion der Ergebnisse wird exemplarisch je ein Individuum aus der Menge an Lösungen ausgewählt und dessen Sprungantwort diskutiert. Es wird darauf geachtet, dass die Individuen ähnliche relative Übergangszeiten von $T_{r,90\%} \approx 0{,}6$ aufweisen.

Abbildung 4 zeigt nun die exemplarischen Sprungantworten als Positions-Zeit-Diagramm wie auch als vereinfachte Zustandstrajektorie im $[e, \dot{e}]$-Raum. Die Lösungen zeigen nach Auftreten des Führungsgrößensprungs einen ähnlich schnellen Anstieg bis etwa $p = 60\,\%$. An diesem Punkt wechselt der Regler basierend auf der Formulierung mit variablen Polen von der Eintreffphase in die Gleitzustandsphase und konvergiert aperiodisch in die Ruhelage. Der Vergleichsansatz ist jedoch nicht in der Lage, in den Gleitzustand überzugehen. Er zeigt einen schwingenden Übergang mit einem vorzeigen Rückschwingen und anschießendem Überschwingen der Führungsgröße, regelt anschließend allerdings aus. Das hier gezeigte Individuum zeigt ein Verhalten, das typischerweise alle Individuen des Lösungsclusters mit kurzen Anstiegszeiten ($T_{r,90\%} \leq 0{,}6$, vgl. Abbildung 3) zeigen. Somit ist davon auszugehen, dass keines der Individuen in der Lage ist, den Gleitzustand aufzubauen. Die Lösungen des zweiten Clusters zeigen ein annähernd vergleichbares Verhalten, wie die Referenzlösung mit linearer Schaltfunktion in **Abbildung 5**. Somit ist davon auszugehen, dass der Gewichtsfaktor k_s (vgl. (8)) durch die Optimierung derart reduziert wird, dass die Schaltfunktion eine annähernd lineare Form annimmt.
Der Referenzregler mit linearer Schaltfunktion in Abbildung 5 ist so gewählt, dass er zu einem vergleichbaren Zeitpunkt in den Gleitzustand eintritt, wie der neu vorgestellte Ansatz. Während der Referenzregler der linearen Schaltfunktion folgt und kontinuierlich die Geschwindigkeit reduziert, wird der Ansatz mit variablen Polen in der Gleitzustandsphase kontrolliert beschleunigt. Die Reduktion der Geschwindigkeit setzt erst zu einem späteren Zeitraum ein, sodass das System bei gleicher Eintreffzeit

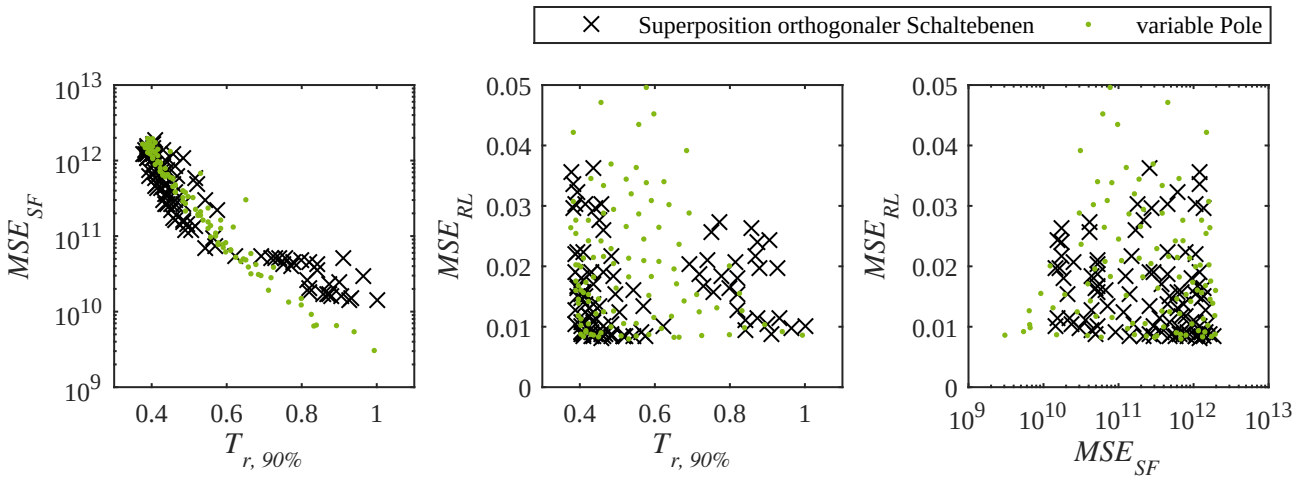


Bild 3 Projektion der Pareto-optimalen Lösungsmengen im Kriterienraum nach der Optimierung nichtlinearer Schaltfunktionen.

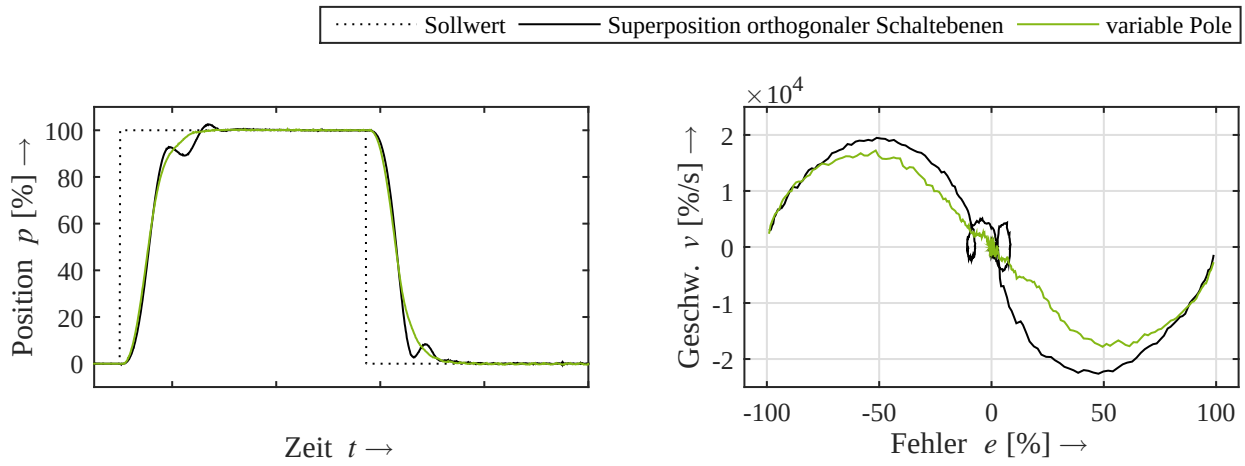


Bild 4 Links: Sprungantworten unterschiedlicher Lösungsindividuen mit nichtlinearer Schaltfunktion. Rechts: Zu den Sprungantworten korrespondierende Geschwindigkeits-Regelfehler-Trajektorien.

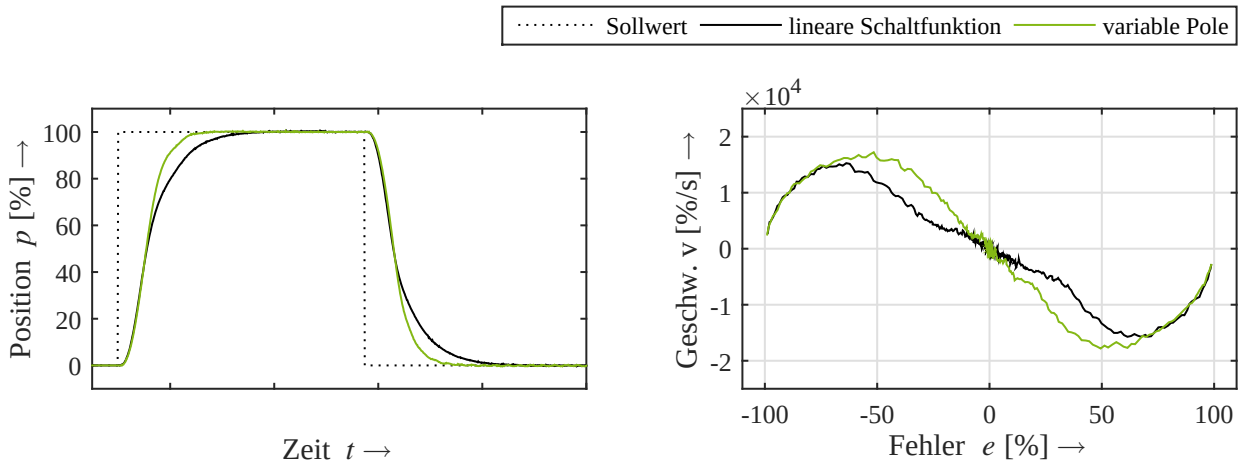


Bild 5 Links: Sprungantworten unterschiedlicher Lösungsindividuen mit linearer und nichtlinearer Schaltfunktion. Rechts: Zu den Sprungantworten korrespondierende Geschwindigkeits-Regelfehler-Trajektorien.

schneller in die Ruhelage konvergiert. Eine steilere lineare Schaltfunktion ist nicht in der Lage, eine vergleichbare Konvergenzgeschwindigkeit bei gleicher Regelungsgüte zu erreichen. Da durch die steilere Schaltfunktion die Eintreffphase verlängert wird, nehmen die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Systems derart zu, dass der Regler nicht mehr in der Lage ist, den Übergang zwischen Eintreffphase und Gleitzustandsphase oszillationsfrei zu realisieren. Dem entsprechend würde die Zeit maximiert, in der das System keine Invarianz gegen Störungen zeigt und sich nicht mit der a priori definierten Dynamik bewegt.
Somit ist festzuhalten, dass der vorgestellte Ansatz zur Variation der Pole des geschlossenen Regelkreises die Limitierungen der linearen Schaltfunktion umgeht und eine verbesserte Regelungsgüte im Vergleich zum Referenzverfahren zeigt.

6 Zusammenfassung

Dieser Beitrag stellt einen neuartigen Ansatz zur Formulierung nichtlinearer Systemdynamiken für Gleitzustandsregler vor. Es wird zunächst die Formulierung linearer extrinsischer Dynamiken und deren Zusammenhang mit der typischerweise in der Gleitzustandsregelung verwendeten Schaltfunktion aufgezeigt. Hierauf basierend werden nun Erweiterungen der Formulierung vorgenommen, die zu einer Steigerung der Dynamik des geschlossenen Regelkreises führen. Zum einen wird ein Literaturansatz nach Tokat et al. diskutiert und weiterhin ein neuartiger Ansatz vorgestellt, dessen Kernidee darin besteht, zur Laufzeit die Lage der Pole des geschlossenen Regelkreises in Abhängigkeit des Regelfehlers zu adaptieren, sodass für kleine Regelfehler schnellere Pole gewählt werden, als für verhältnismäßig große Fehler. Die vorgestellten Methoden werden in dieser Arbeit zur Lageregelung eines hydraulischen Wegeventils angewandt. Zur Kompensation des dem Re-

gelungskonzept geschuldeten Ratterns wird ein Gleitzustandsregler zweiter Ordnung genutzt, der das binäre Stellgesetz in ein kontinuierliches Stellgesetz überführt. Die Parametrisierung der Schaltfunktionen sowie des Stellgesetzes erfolgt durch multi-kriterielle Optimierungen der Sprungantworten des geregelten Systems. Es werden sowohl klassische regelungstechnische Gütemaße wie auch ein Maß zur Maximierung des Gleitzustands verwendet. Der Vergleich der Lösungspopulationen zeigt eine deutliche Verbesserung des Gleitzustands bei vergleichbarer Dynamik und Präzision in der Ruhelage bei Verwendung des neu präsentierten Ansatzes. Der Vergleich von Sprungantworten und Zustandstrajektorien bestätigt diese Aussage sowie der Vergleich mit einem System mit linearer Schaltfunktion zeigt deutlich die Vorteile nichtlinearer Schaltfunktionen zur Steigerung der Dynamik im Gleitzustand auf. Somit ist gezeigt worden, dass durch die Implementierung eines Gleitzustandsreglers für die Regelung hydraulischer Wegeventile das Komplexitätsproblem der Parametrisierung eines PI-Reglers mit nichtlinearen Parameterkennlinien vereinfacht werden kann, Entwicklungszeiten reduziert wie auch Kosten eingespart werden können. Die neu eingeführte Formulierung bietet dem Prozessexperten im Vergleich zu anderen Verfahren den Vorteil, dass die verwendeten Parameter unmittelbaren Rückschluss auf die Dynamik des geschlossenen Regelkreises bieten und somit intuitiv zu parametrisieren sind.

Literatur

[1] Bartolini, G.; Ferrara, A.; Usani, U: *Chattering avoidance by second-order sliding mode control*. IEEE Transactions on Automatic Control. (1998) 43-2, S. 241–246.

[2] Bartoszewicz, A.; Nowacka, A.: *Optimal design of the shifted switching planes for vsc of a third-order system*. Transactions of the Institute of Measurement and Control. (2006) 28-4, S. 335–352.

[3] Bartoszewicz, A.: *A comment on 'a time-varying sliding surface for fast and robust tracking control of second-order uncertain systems'*. Automatica. (1995) 31-12, S. 1893–1895.

[4] Brandtstädter, H.: *Sliding mode control of electromechanical systems*. Dissertation, TU München, 2009.

[5] Choi, S. B.; Park, D. P.; Jayasuriya, S.: *A time-varying sliding surface for fast and robust tracking control of second-order uncertain systems*. Automatica. (1994) 30-5, S. 899–904.

[6] Corless, M.; Leitmann, G.: *Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems*. IEEE Transactions on Automatic Control. (1981) 26-5, S. 1139–1144.

[7] Deb, K.; Pratap, A.; Agarwal, S.; Meyarivan, T.: *A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II*. IEEE Transactions on Evolutionary Computation. (2002) 6-2, S. 182–197.

[8] Gamble, J. B.; Vaughan, N. D.: *Comparison of sliding mode control with state feedback and pid control applied to a proportional solenoid valve*. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. (1996) 118, S. 434–438.

[9] Komsta, J.: *Nonlinear robust control of electrohydraulic systems*. Düsseldorf, VDI-Verlag, 2013.

[10] Krettek, J.; Braun, J.; Hoffmann, F.; Bertram, T.; Ewald, T.; Schubert, H. G.; Lausch, H.: *Interactive evolutionary multiobjective optimization for hydraulic valve controller parameters*. IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics. (2009), S. 816–821.

[11] Krettek, J.; Schauten, D.; Hoffmann, F.; Bertram, T.: *Evolutionary hardware-in-the-loop optimization of a controller for cascaded hydraulic valves*. IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics. (2007), S. 1–6.

[12] Krimpmann, C.; Braun, J.; Bertram, T.; Glowatzky, I.; Ewald, T.; Lausch, H.: *Intuitive objective definition for the automated optimization of hydraulic valves*. 9th International Fluid Power Conference. (2014), S. 68–78.

[13] Levant, A.: *Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control*. International Journal of Control. (1993) 58-6, S. 1247–1263.

[14] Levant, A.: *Universal single-input-single-output (siso) sliding-mode controllers with finite-time convergence*. IEEE Transactions on Automatic Control. (2001) 46-9, S. 1447–1451.

[15] Levant, A.: *Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers*. IEEE Transactions on Automatic Control. (2005) 50-11, S. 1812–1816.

[16] Shtessel, Y. B.; Shkolnikov, I. A.; Brown, M. D. J.: *An asymptotic second-order smooth sliding mode control*. Asian Journal of Control. (2003) 5-4, S. 498–504.

[17] Slotine, J.-J. E.; Li, W.: *Applied nonlinear control*. Englewood Cliffs, N.J, Prentice Hall, 1991.

[18] Tokat, S.; Eksin, I.; Guzelkaya, M.: *Sliding mode control of high order systems using a constant nonlinear sliding surface on a transformed coordinate axis*. Journal of Vibration and Control. (2008) 14-6, S. 909–927.

[19] Zinober, A. S. I.; Ei-Ghezawi, O.M.E.; Billings, S. A.: *Multivariable variable-structure adaptive model-following control systems*. IEE Proceedings D Control Theory and Applications. (1982) 129-1, S. 6–12.

Abrollendes Kontaktelement als Endeffektor eines ebenen rekonfigurierbaren Manipulators mit drei Freiheitsgraden und anschließender Betrachtung der Kinematik
Introduction of a 1-DOF rolling contact element for a planar reconfigurable manipulator

Dipl.-Ing. Stefan Kurtenbach, RWTH Aachen University, Institut für Getriebetechnik und Maschinendynamik, 52062 Aachen, Deutschland, kurtenbach@igm.rwth-aachen.de
Fritz Ehreiser B.-Sc., RWTH Aachen University, Institut für Getriebetechnik und Maschinendynamik, 52062 Aachen, Deutschland, ehreiser@igm.rwth-aachen.de
Dr.-Ing. Mathias Hüsing, RWTH Aachen University, Institut für Getriebetechnik und Maschinendynamik, 52062 Aachen, Deutschland, huesing@igm.rwth-aachen.de
Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. Burkhard Corves, RWTH Aachen University, Institut für Getriebetechnik und Maschinendynamik, 52062 Aachen, Deutschland, corves@igm.rwth-aachen.de

Kurzfassung

In diesem Beitrag wird ein abrollendes Kontaktelement und seine Verwendung in einem ebenen Manipulator vorgestellt. Ausgehend vom Stand der Technik in diesem Bereich wird die Kinematik des Manipulators hergeleitet. Drei verschiedene Fälle einer Objektbewegung in einem ebenen Arbeitsraum werden für die Herleitung der Kinematik verwendet. Die Überlagerung dieser Fälle führt zu einer allgemeinen kinematischen Gleichung, in der schließlich die Antriebswinkel berechnet werden können.

Abstract

This paper introduces a rolling contact element and its usage in a planar manipulator. Starting from the state of the art in this field of motion technology, the kinematic structure of the manipulator is introduced. Three different cases for moving an object in a planar workspace are used for the derivation of the kinematics. Superposing these cases leads to the general kinematic equations where finally the input angles can be calculated.

1 Einleitung

Aktuelle Entwicklungen im Bereich der Greifertechnik konzentrieren sich immer mehr auf maßgeschneiderte Lösungen, um eine Bewegungsaufgabe ideal durchzuführen. Durch die Spezialisierung entsteht eine sehr breite Palette von unterschiedlichen Greifern, Greifeinheiten und anderen Kontaktelementen.
Je nach Materialeigenschaften, Oberflächeneigenschaften, der Form und einigen anderen Merkmalen des zu manipulierenden Objekts können verschiedene dieser Greifer ausgewählt werden, um innerhalb des Bewegungsaufgabe verwendet zu werden.
In diesem Paper wird durch einen kraftschlüssigen Endeffektor ein allgemeinerer Ansatz verfolgt. Das Kontaktelement kann auf dem Objekt abrollen und besitzt einen Freiheitsgrad im Kontaktpunkt. Somit kann ein einziger Endeffektor mehrere Objekte bewegen und ist weitgehend unabhängig von deren Objekteigenschaften. Ferner wird das gesamte Handhabungssystem (ebener Manipulator) flexibel, rekonfigurierbar und vielseitig [1].

Der wesentliche Unterschied dieser Art von Handhabungssystemen ist die Integration des Objektes in die kinematische Struktur. Das Objekt selbst wird zu einem Getriebeglied und damit Teil der Struktur. Um eine Bewegung des Objektes in einem ebenen Arbeitsraum zu realisieren, müssen insgesamt drei Freiheitsgrade der Bewegung vorliegen. Diese entsprechen zwei zueinander senkrechten Translationen und einer Rotation. Die Kinematik eines Manipulators, der diese Anforderungen erfüllt ist in **Bild 1** dargestellt. Das Objekt (Glied 3) ist in dieser Konfiguration ein Zylinder mit einer konstanten Krümmung. Drei abrollende Kontaktelemente, die je zu einem Zweischlag gehören, binden das Objekt über je einen Kontaktpunkt in die kinematische Struktur ein. Die im Gestell montierten Glieder 1, 5 und 7 sind die Antriebsglieder. In diesem Paper stellen die Antriebsglieder nur das Moment zur Bewegung des Objektes mit 3 DOF zur Verfügung. Da es keine redundante Anordnung gibt, können die Antriebe keine Anpresskraft erzeugen. Diese Anpresskraft der abrollenden Kontaktelemente ist eine weitere Designaufgabe und kann durch form- oder kraftschlüssig mit Hilfe einer Zwanglaufsicherung (Anpressmechanismus, Feder, usw.) realisiert werden.

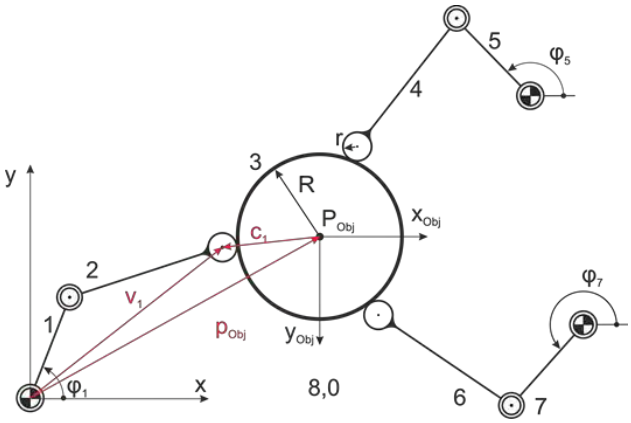


Bild 1 Kinematische Struktur des Mechanismus

Die Lösung des Vektorzuges (**Gl. 1**) wird in den folgenden Kapiteln dargestellt:

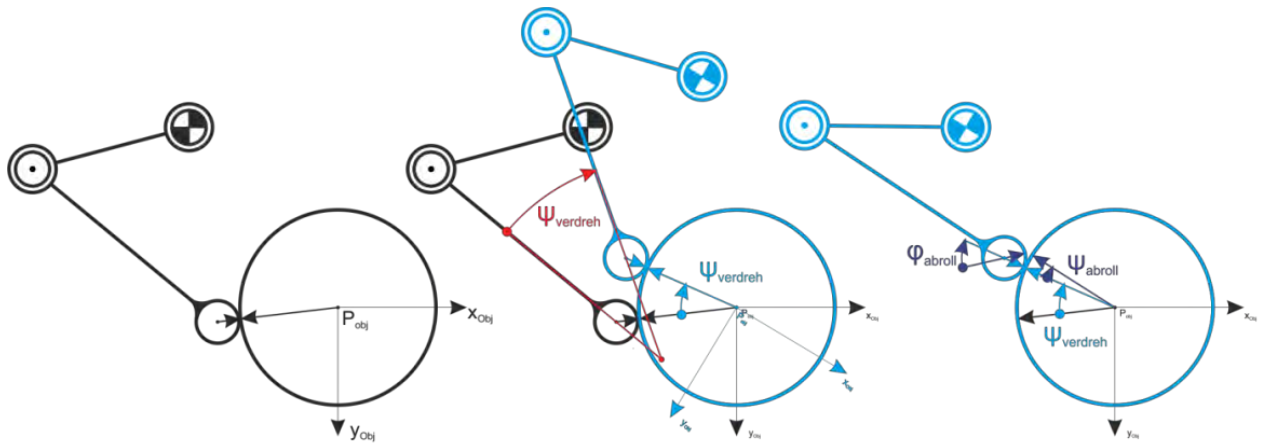
$$v_1 = p_{obj} + c_1 \tag{1}$$

2 Stand der Technik

Die Anwendung von abrollenden Greifern wird im Laufe der Zeit immer wieder vorgeschlagen. Sie sind in verschiedene, sowohl ebene als auch räumliche Roboterstrukturen integriert und passen sich an das Objekt mit unterschiedlichen Formen an.
Cole et. al. zeigt in [2] die Kinematik und Steuerung für die Manipulation eines elliptischen Objekts mit mehreren Roboterarmen. Das Objekt wird mit 6 DOF in einem dreidimensionalen Arbeitsbereich bewegt. Es wird die Kinematik, Dynamik und Steuerung des Systems vorgestellt.
Ponce et. al. untersucht in [3] den Einfluss der Variation der Objektform. Sie fokussieren sich auf n-Polygone, wobei das abrollende Kontaktelement auf einer Seite des Polygons während der Bewegung bleibt.
Die geschickte Manipulierbarkeit für mehrarmige Roboter ist Gegenstand in [4]. Eine generelle Vorgehensweise wurde für geschickte Manipulation einer Kugel mit flachem Finger entwickelt.
Sowie Ponce et. al. in [3] als auch Hasegawa in [5] und Yoshida et. al. in [6] untersuchen die Stabilität in Greifprozessen. Hasegawa implementiert einen Bewegungsplanungsalgorithmus für mehrarmige Manipulation mit abrollenden Kontaktelementen in 3D. Dieser Algorithmus schlägt automatisch die optimalen Kontaktpunkte vor, die zu einem stabilen Prozess führen. Yoshida analysiert die Stabilität eines Greifprozesses in dem weichen Fingerspitzen eingesetzt werden.
Jeong et. al. präsentiert in [7] einen ebenen Manipulator mit einem 2D-Arbeitsbereich und eine redundante Ansteuerung mit vier abrollenden Kontaktelementen. Aufgrund dieser Konfiguration ist ein lösen und neu greifen möglich, da nur drei Kontaktelemente gleichzeitig im Eingriff sein müssen.

3 Bewegungsablauf

In diesem Kapitel werden die kinematischen Gleichungen der in **Bild 1** gezeigten kinematischen Struktur hergeleitet.Der Mechanismus ist aus einzelnen drei Manipulatoren zusammengesetzt, die jeweils in der betrachteten Ebene einen punktförmigen Kontakt mit dem sich zu bewegenden Objekt besitzen. Bei einer Bewegung des Objektes bewegt sich der Kontaktpunkt auf der Außenkontur des Objektes, sowie auf der des Manipulators. Die Verbindung wird als schlupffrei angenommen und über eine Abrollbedingung definiert, die von der Kontur beider Körper abhängt. In dem hier behandelten Beispiel haben beide Körper eine konstante Krümmung (siehe **Bild 1**) mit dem Radius r für den Endeffektor und Radius R für das Objekt.
Da alle drei Manipulatoren dieselbe Konfiguration aufweisen und auch gleiche Randbedingungen besitzen ist auch die Kinematik identisch. Folglich wird das untersuchte System auf den linken Zweischlag mit dem Antriebswinkel φ_1 und das Objekt reduziert. Um die Bewegungsgleichung des Zweischlages mit dem Manipulator zu ermitteln wird die Bewegung in die drei einzelnen ebenen Bewegungen aufgeteilt: Translation in x- und y-Richtung und die Rotation um die z-Achse.



Schritt 1 - Ausgangslage Schritt 2 - Bewegung des Systems Schritt 3 - Rückbildung des Zweischlages

Bild 2 Handhabungssequenz

3.1 Rotation um die z-Achse

Die Bewegung ist in drei Schritte unterteilt, welche durch eine schrittweise Simulation zur Aufstellung der Bewegungsgleichung dienen. Von der Ausgangslage (Schritt 1 in **Bild 2**) wird das gesamte System um den Ursprung des Objektes mit dem Winkel $\psi_{verdreh}$ (Schritt 2) gedreht.
Der Kontaktpunkt ist fest mit dem Objekt verbunden und die Gelenke des Zweischlags gesperrt. Anschließend erfolgt eine schrittweise Rückdrehung des Zweischlages in seinen ursprünglichen Gestellpunkt. Die Freigabe der Drehgelenke führt zu einem Abrollen im Kontaktpunkt mit einer Winkeländerung φ_{abroll} des Gliedes 2 und ψ_{abroll} für den Zylinder.
Für die Bewegungsbeschreibung werden mehrere neue Variablen eingeführt die in **Tabelle 1** aufgeführt sind. φ_i beschreibt allgemein die Lage des Gliedes i relativ zum Grundgestell. Wenn beide Winkel φ_1 und φ_2 bekannt sind kann der Vektor v_1 berechnet werden. Um den Vektorzug aus **Gl. 1** zu schließen muss die relative Lage des Objektes und dessen Orientierung bekannt sein. Daraus lässt sich der Vektor c_1 ermitteln. Dieser zeigt vom Ursprung des Objektes zum Mittelpunkt des Endeffektors und hat die Länge r + R. Die Orientierung wird durch den Winkel ψ beschrieben.
Über **Gl. 1** kann entweder die Pose des Objektes bestimmt werden oder die Antriebsgrößen des Systems.

Tabelle 1 Variablen zur Bewegungsbeschreibung

Variable	*Beschreibung*
φ_1	Antriebswinkel von Glied 1
φ_2	Rotationswinkel von Glied 2
φ_{abroll}	Abrollwinkel des Endeffektors
ψ	Gesamtrotation des Objektes um seine z-Achse
ψ_{abroll}	Abrollwinkel auf dem Objekt
$\psi_{verdreh}$	Verdrehwinkel des Objekts
v_1	Vektor, der die Mitte des Endeffektors vom Gestell aus beschreibt
c_1	Vektor von dem Objektursprung zum Krümmungsmittelpunkt des Endeffektors

Die Abrollbedingung in **Gl. 2** leitet sich aus der Randbedingung eines schlupffrei abrollenden Kontaktpunktes zwischen dem Endeffektor und dem Objekt, ab.

$$r \cdot \varphi_{abroll} = R \cdot \psi_{abroll} \tag{2}$$

Bei einer Rotation um die z-Achse des Objekts ändert sich definitionsgemäß der Winkel ψ. Durch den abrollenden Kontaktpunkt kann die Rotation durch zwei Teile beschrieben werden, wie im **Bild 2** dargestellt. Der erste Teil, bei dem um den Winkel $\psi_{verdreh}$ gedreht wird, beschreibt die Rotation des Vektors c_1. Der zweite Teil, bei dem ein Abrollen um ψ_{abroll} stattfindet, ist das Resultat aus der Abrollbedingung zwischen den beiden Gliedern.

$$\psi = \psi_{verdreh} + \psi_{abroll} \tag{3}$$

Bild 3 zeigt die Überlagerung der Schritte 1 bis 3 aus **Bild 2**. Der Zusammenhang des Anfangs- und Endzustandes der Bewegung wird genutzt, um die neue Orientierung von c_1 für eine reine Rotation zu beschreiben. Die neue Orientierung des Gliedes 2 ergibt sich durch die Winkel $\psi_{verdreh}$ und φ_{abroll}. Dies ist durch die folgenden Gleichungen beschrieben.

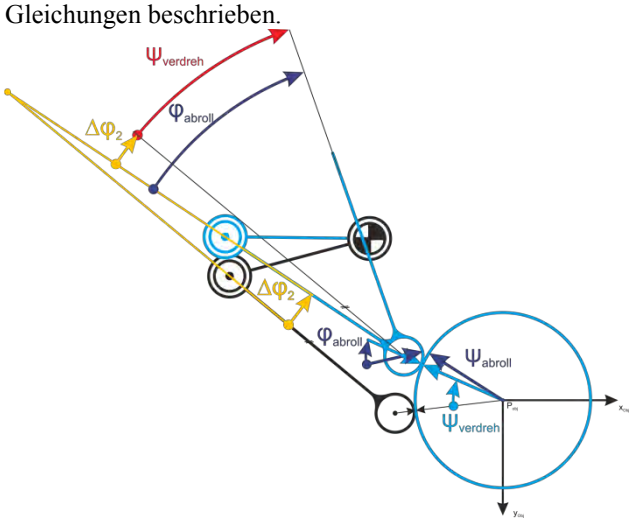


Bild 3 Geometrische Zusammenhänge der Winkel für eine Rotation des Systems

Die Berechnung der neuen Position des Gliedes zwei basiert auf der Gleichung $\Delta\varphi_2 = \varphi_2^i - \varphi_2^{i-1}$, wobei die Position i-1 immer bekannt ist und mit dem Kontaktpunkt als Ausgangslage beginnt. Somit wird die Berechnung der Antriebswinkel zu einer abhängigen Trajektorie und die inverse Kinematik kann inkrementell gelöst werden. Die Änderung der Orientierung $\Delta\varphi_2$ ist gleich zu der Subtraktion der Winkel, die durch die Bewegung des Kontaktpunktes auf der Oberfläche des Endeffektors φ_{abroll} aufgespannt werden und die Änderung $\psi_{verdreh}$ der Orientierung von c_1. Aus diesem Zusammenhang ergibt sich **Gl. 4**, die den Zusammenhang zwischen der Objektrotation und der Bewegung des Gliedes 2 beschreibt.

$$\varphi_{abroll} = \Delta\varphi_2 + \psi_{verdreh} \tag{4}$$

Somit kann die Winkeländerung von c_1 nach **Gl. 5** aufgestellt werden, die durch Einsetzen von **Gl 2** und **Gl 4** in **Gl 3**.

$$\psi_{verdreh} = \frac{R}{R+r} \cdot \psi - \frac{r}{R+r} \cdot \Delta\varphi_2 \tag{5}$$

Mit den Randbedingungen des Systems, der Abrollbedingung aus **Gl 2** sowie der gezeigten Rotation von c_1 in **Gl 5** kann diese nach **Gl. 6.2** umgestellt werden, wobei φ_{start} die Ausgangslage beschreibt:

$$c_{1,verdreh} = \begin{pmatrix} (R+r)\cdot\cos(\psi_{Start}+\psi_{verdreh}) \\ (R+r)\cdot\sin(\psi_{Start}+\psi_{verdreh}) \end{pmatrix}_{verdreh} \tag{6.1}$$

$$c_{1,verdreh} = \begin{pmatrix} (R+r)\cdot\cos(\psi_{Start}+\frac{R}{R+r}\cdot\psi-\frac{r}{R+r}\cdot\Delta\varphi_2) \\ (R+r)\cdot\sin(\psi_{Start}+\frac{R}{R+r}\cdot\psi-\frac{r}{R+r}\cdot\Delta\varphi_2) \end{pmatrix}_{verdreh} \tag{6.2}$$

3.2 Translation in x- und y-Richtung

Für eine translatorische Bewegung bleibt der Ansatz der gleiche. Durch die Bewegung in Richtung des Manipulators oder weg von diesem müssen beide Getriebeglieder neu positioniert werden. Dies führt zu einer Winkeländerung von φ_1 und φ_2. Außerdem ändert sich die Orientierung des Endeffektors und somit der Kontaktpunkt. In **Bild 4** ist die Bewegung in positive x-Richtung gezeigt. Die Winkel φ_{abroll} und ψ_{abroll} aus **Bild 3** finden sich wieder.

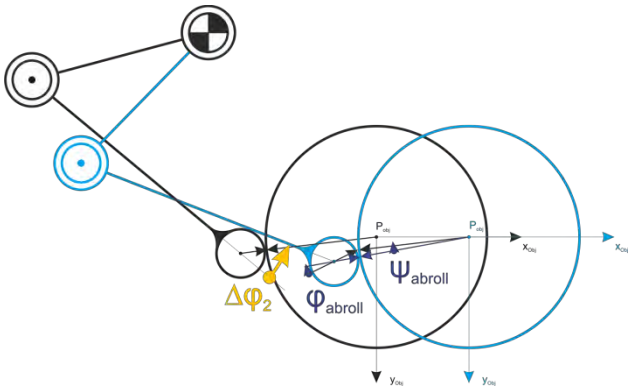


Bild 4 Geometrische Zusammenhänge der Winkel für eine Translation des Systems

Die Verschiebung des Mittelpunktes des Objekts ist durch Δx_{Pobj} und Δy_{Pobj} beschrieben. Da sich das Objekt für eine reine Translation nicht dreht, ist $\psi = 0$. Also kann **Gl 5** zu **Gl. 7** gekürzt werden.

$$\psi_{verdreh} = -\frac{r}{R+r} \cdot \Delta\varphi_2 \tag{7}$$

Die Neuausrichtung von c_1 ist direkt mit der Drehung des Gliedes 2 verknüpft. Da nur eine Translation berechnet wird ist die Rotation von c_1 nur abhängig von der Änderung des Gliedes 2 und somit von φ_2. Für eine Überlagerung beider Operationen wird c_1 nach **Gl. 8.2** berechnet.

$$c_{1,translation} = \begin{pmatrix} (R+r)\cdot\cos(\psi_{Start}+\psi_{verdreh}) \\ (R+r)\cdot\sin(\psi_{Start}+\psi_{verdreh}) \end{pmatrix}_{translation} \tag{8.1}$$

$$c_{1,translation} = \begin{pmatrix} (R+r)\cdot\cos(\psi_{Start}-\frac{r}{R+r}\cdot\Delta\varphi_2) \\ (R+r)\cdot\sin(\psi_{Start}-\frac{r}{R+r}\cdot\Delta\varphi_2) \end{pmatrix}_{translation} \tag{8.2}$$

3.3 Überlagerte Bewegung

Die allgemeine Bewegung des Objekts ist eine kombinierte Bewegung, die sich aus translatorischen und rotatorischen Anteilen zusammensetzt. Um die neue Position der Antriebsglieder in Form von $v_{1,nP}$ (neue Position) zu berechnen, muss die Bewegungsaufgabe bekannt sein, die sich aus den Randbedingungen für die neue Objektposition (Δx_{Pobj}, Δy_{Pobj}) und der Objektrotation (ψ) ergibt. Ausgehend von der Anfangsposition p_{obj}, wird die folgende **Gl. 9** für die allgemeine Bewegung aufgestellt. Der Vektor des Zweischlages in der neuen Position $v_{1,nP}$ kann durch die geometrischen Abmessungen der Glieder sowie der Antriebswinkel in **Gl. 10** berechnet werden.
Diese Gleichung ist von bekannten Parametern wie den Getriebegliedlängen, der Anfangs- und Endposition und Orientierung des Objektes, sowie des Greifpunktes abhängig. Die Lösung dieser Gleichung ergibt die Antriebswinkel φ_i des Zweischlages. Da die Objektbewegung eine 3-DOF Bewegung ist, muss das Verfahren für alle Zweischläge wiederholt werden mit dem Lösungsvektor φ_i. Durch die Verwendung des vollständigen Gleichungssystems kann die inverse Kinematik mit bestimmten Trajektorien in inkrementellen Schritten gelöst werden.

$$v_{1,nP} = p_{obj} + \Delta p_{obj} + c_{1,translation} + c_{1,verdreh} \tag{9}$$

$$v_{1,nP} = \begin{pmatrix} l_1\cdot\cos(\varphi_1)+l_2\cdot\cos(\varphi_2) \\ l_1\cdot\sin(\varphi_1)+l_2\cdot\sin(\varphi_2) \end{pmatrix} = p_{obj} + \Delta p_{obj} + c_{1,translation} + c_{1,verdreh} \tag{10.1}$$

$$v_{1,nP} = \begin{pmatrix} l_1\cdot\cos(\varphi_1^i) + l_2\cdot\cos(\varphi_2^i) \\ l_1\cdot\sin(\varphi_1^i) + l_2\cdot\sin(\varphi_2^i) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} x_{obj} \\ y_{obj} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x_{obj} \\ \Delta y_{obj} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (R+r)\cdot\cos(\psi_{Start}-\frac{r}{R+r}(\varphi_2^i-\varphi_2^{i-1})) \\ (R+r)\cdot\sin(\psi_{Start}-\frac{r}{R+r}(\varphi_2^i-\varphi_2^{i-1})) \end{pmatrix}_{translation} + \begin{pmatrix} (R+r)\cdot\cos(\psi_{Start}+\frac{R}{R+r}\cdot\psi-\frac{r}{R+r}(\varphi_2^i-\varphi_2^{i-1})) \\ (R+r)\cdot\sin(\psi_{Start}+\frac{R}{R+r}\cdot\psi-\frac{r}{R+r}(\varphi_2^i-\varphi_2^{i-1})) \end{pmatrix}_{verdreh} \tag{10.2}$$

4 Design des ebenen Manipulators

Die endgültige Gestaltung des Manipulators zeigt **Bild 5**. Die abrollenden Kontaktelemente sind im Eingriff mit dem Zylinder. Die Betrachtung des möglichen Bewegungsraumes wird in diesem Beitrag nicht untersucht. Die drei Zweischläge sind in einem starren Rahmen gelagert. Über einen Riementrieb wird das Antriebsmoment auf die Antriebsglieder übertragen.

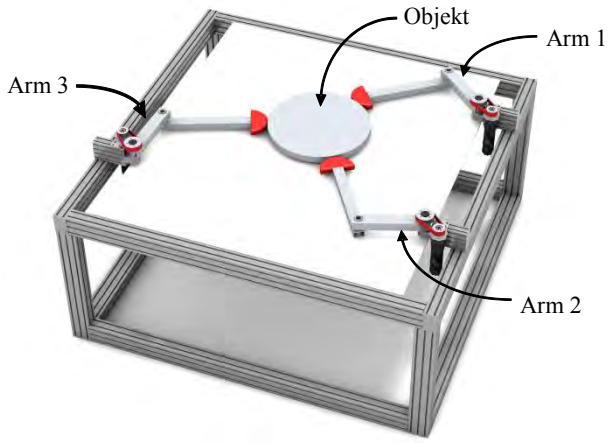


Bild 5 Endgültige Gestaltung des Manipulators

5 Zusammenfassung

Das Paper stellt einen Manipulator vor, der mit drei Armen ein Objekt durch abrollende Kontaktelemente handhabt. Folglich kann der Orientierungsarbeitsraum vergrößert werden, da jede Translation oder Rotation durch ein Abrollen der Kontaktelemente überlagert wird. Das vorgestellte Konzept kann in räumliche Robotik übertragen werden, um Handhabungsaufgaben in diesem Anwendungsgebiet zu unterstützen.

6 Danksagung

Da Teile dieser Arbeit im Rahmen des Exzellenzcluster der RWTH Aachen "Integrative Produktionstechnik für Hochlohnländer (EXC 128)" durchgeführt wurden danken die Autoren der Deutschen Forschungsgemeinschaft für ihre Unterstützung.

7 Literatur

[1] Müller, R.; Riedel, M.; Vette, M.; Corves, B.; Esser, M.; Hüsing, M.: *Reconfigurable Self-Optimising Handling System*. In: Ratchev, S. (ed.) IPAS 2010. IFIP AICT, vol. 315, pp. 255–262. Springer, Heidelberg, 2010. ISBN 978-3-642-11597-4

[2] Cole, A. B. A.; Hauser, J. E.; Sastry, S: *Kinematics and Control of Multifingered Hands with Rolling Contact.* In IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 34, No. 4, April 1989

[3] Ponce, J; Faverjon, B.: *On Computing Three-Finger Force-Closure Grasps of Polygonal Objects.* In: IEEE transactions on Robotics and Automation, Vol. 11, No. 6, December 1995.

[4] Han, L.; Guan, Y.; Li, Z.; Shi, Q. and Trinkle, J.: *Dextrous manipulation with rolling contacts.* In: Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation, Vol. 2, pp. 992–997, 1997.

[5] Hasegawa, T.; Mukrakami, K.: *Finger Motion Planning of a Multi-fingered Manipulation with Rolling Contact.* In: Proceedings of the IEEE International Symposium on Assembly and Task Planning, 2001, pp. 196–201, 2001.

[6] Yoshida, M.; Arimoto, S.; Bae, J.-H. and Luo, Z.-W.: *Stable grasp of a 2d rigid object through rolling with soft fingers.* In: IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics, 2007, pp. 870–876, 2007.

[7] Jeong, H.; Cheong, J.: *In-hand Rolling Motion Planning using Independent Contact Region (ICR) with Guaranteed Grasp Quality Margin.* In: IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), Karlsruhe, Germany, May 6-10, 2013

Energie-optimale Trajektorien für seilbasierte Manipulatoren unter Verwendung von passiven Elementen

M. Eng. Christopher Reichert[1], B. Sc. Ulrich Unterberg[1], Dr.-Ing. Tobias Bruckmann[1]
[1]Universität Duisburg-Essen, Lehrstuhl für Mechatronik, 47057 Duisburg, Deutschland, {reichert, unterberg, bruckmann}@mechatronik.uni-duisburg.de

Kurzfassung

Die außergewöhnlichen dynamischen Eigenschaften eines Seilroboters, wie z. B. hohe Geschwindigkeiten der Arbeitsplattform über einen großen Arbeitsraum bereitstellen zu können, erfordern große Seilkräfte, die vom Antriebssystem aufgebracht werden müssen. Darüber hinaus muss zu jedem Zeitpunkt eine vollständige Verspannung der Seile garantiert sein, was weiter zu einem erhöhten Energiebedarf beiträgt. Im vorliegenden Beitrag wird eine Methode zur Generierung von Energie-optimalen Trajektorien unter Verwendung von passiven Elementen vorgestellt. Ziel dieser Arbeit ist es, die Parameter der passiven Elemente – bei Federn also Federsteifigkeit und Vorspannung – bezüglich einer vorgegebenen Trajektorie optimal anzupassen. Als ein mögliches Anwendungsszenario werden Pick-&-Place-Aufgaben herangezogen. Die Optimierung der Parameter der passiven Elemente basiert auf einem evolutionären Algorithmus. Hierbei läuft die Optimierung in drei Schritten ab. In einem ersten Schritt werden die Parameter der Federn hinsichtlich eines minimalen Energieverbrauchs optimiert. Im zweiten Schritt erfolgt eine Anpassung der Zykluszeit für eine gegebene Trajektorie. Schlussendlich erfolgt eine Anpassung der Form der Bahnkurve zwischen Start- und Endpunkt. Somit werden die Minimierung des Energiebedarfs und eine Reduzierung der Zykluszeit erreicht. Die experimentellen Ergebnisse zeigen eine deutliche Reduzierung des Energiebedarfs des Antriebssystems unter dem Einsatz von vorgespannten Federn und angepassten Bahnkurven, sowie der zugrundeliegenden Zykluszeit für eine gegebene Trajektorie.

1 Einleitung

Bei parallelen seilbasierten Manipulatoren (Seilroboter) führt ein verspanntes System von Seilen in paralleler Topologie eine Arbeitsplattform (Endeffektor) entlang einer vorgegebenen Bahn. Die Seile werden hierbei von motorgetriebenen Winden auf- bzw. abgewickelt und über ortsfeste Umlenkrollen in den Arbeitsraum geführt. Bedingt durch die unilateralen Eigenschaften von Seilen – Seile können stets nur Zugkräfte aufbringen – muss eine vollständige Verspannung des Endeffektors zu jedem Zeitpunkt garantiert sein. Eine Lösung stellt das strukturkonforme Einbringen von zusätzlich angetriebenen Seilen (Antriebsredundanz) dar, ohne dabei die Zahl der Bewegungsfreiheitsgrade des Endeffektors zu beeinflussen. Diese strukturelle Erweiterung ermöglicht eine optimale Verteilung der zur Verfügung stehenden Seilkräfte und somit die gezielte Vorgabe eines Verspannungsniveaus in den Seilen, welche direkt die mechanische Steifigkeit des Endeffektors beeinflusst. Weiter kann die Antriebsredundanz eine Erhöhung und Homogenisierung des Kraftvermögens eines Seilroboters zugunsten erhöhter Beschleunigung und Nutzlast bewirken. Nichtsdestotrotz erfordert das Aufrechterhalten eines Verspannungsniveaus in den Seilen einen verhältnismäßig hohen Energiebedarf. Noch viel bedeutsamer ist, dass infolge der unilateralen Eigenschaften von Seilen nur die Hälfte des Leistungsvermögens der motorgetriebenen Winden ausgenutzt werden kann. Somit ist eine Überdimensionierung der motorgetriebenen Winden unausweichlich, die zu einem Mehrkostenaufwand führt und somit die Wirtschaftlichkeit negativ beeinflusst. Dieses Dilemma kann unter der Verwendung eines minimalen Verspannungsniveaus geringfügig gemildert werden, was aber zum Durchhängen der Seile führen kann. Hierbei gilt es weiter zu berücksichtigen, dass eine Reduzierung des Verspannungsniveaus in den Seilen die mechanische Steifigkeit des Endeffektors herabsetzt. Somit ist mit einer stärkeren Abweichung des Endeffektors von der Solltrajektorie innerhalb der Bewegungsaufgabe zu rechnen.

Durch den Einsatz von passiven Elementen in Form von vorgespannten Federn kann die Energieeffizienz von Seilrobotern gesteigert werden [1]. Hierbei werden die motorgetriebenen Winden durch vorgespannte Torsionsfedern ergänzt. Die vorgespannten Federn wirken hierbei als Energiespeicher und begünstigen eine Eigenbewegung des Endeffektors [2]. Diese konstruktive Erweiterung führt weiter zu einem symmetrischen Leistungsniveau der motorgetriebenen Winden und begünstigt die Ausschöpfung des gesamten Leistungsvermögens der Antriebe, basierend auf einer energetisch günstigeren Verteilung der Antriebsmomente. Der Einsatz von kleiner dimensionierten Antrieben wird möglich.

Um die Wirtschaftlichkeit und kommerzielle Nutzbarkeit eines Seilroboters zu gewährleisten, ist nicht nur ein geringer Energiebedarf, sondern auch eine geringe Zykluszeit innerhalb der Bewegungsaufgabe wünschenswert [3]. Aus diesem Grund gilt es bei der Generierung von Energie-optimalen Trajektorien weiter, die durch die Federn ermöglichte Eigenbewegung des Endeffektors zu berücksichtigen. Durch diesen Schritt ist weiter eine Reduzierung der

Zykluszeit möglich ohne dabei die Spitzenenergieverläufe einzelner Motoren nennenswert zu erhöhen.
Die optimale Anpassung eines Seilroboters an eine gewünschte Bewegungsaufgabe ist ein wünschenswertes Ziel. Diese Herangehensweise wird als Design-To-Task bezeichnet und eignet sich in besonderem Maße für Pick-&-Place-Aufgaben im Rahmen der Serienproduktion, also für Anwendungen mit einer hohen Wiederholungsrate der gleichen Bewegungsaufgabe. Unter Optimalität wird in diesem Sinne die Minimierung des Energieverbrauchs des verwendeten Antriebssystems, sowie der Zykluszeit der Bewegungsaufgabe verstanden. Im Rahmen der Arbeit [4] wird das Synthese-Problem für einen vorliegenden Seilroboter als sogenanntes Constraint-Satisfaction Problem beschrieben und mithilfe der Intervall-Analyse gelöst. Dabei wird die Optimierung der Geometrieparameter, sowie die zugrundeliegende Trajektorie im selben Schritt durchgeführt. Im Gegensatz dazu bedient sich die vorliegende Arbeit einem evolutionären Algorithmus zur Optimierung der Parameter der vorgespannten Federn. Durch die Einfachheit des verwendeten Algorithmus kann im Vergleich zur rechenintensiven Intervallanalyse eine Reduzierung der benötigten Rechenzeit erreicht werden. Aufgrund der großen Anzahl der zu optimierenden Parameter und der benötigten Randbedingungen wird des Weiteren eine Unterteilung der Optimierung von Federparametern, Zykluszeit und entsprechender Bahnkurve auf mehrere Schritte vorgenommen.
Aufgrund der vielfältigen positiven Eigenschaften von Seilrobotern besitzen diese ein großes Anwendungspotenzial und befinden sich auf dem Vormarsch in die industrielle Anwendung. Hierbei erstreckt sich das Einsatzgebiet von Seilrobotern insbesondere auf Bewegungsaufgaben, bei denen eine hohe Dynamik über einen großen Arbeitsraum gefordert wird. Seilroboter stellen somit eine Alternative zu konventionellen seriellen Manipulatoren dar, wo einerseits serielle Manipulatoren den erforderlichen Arbeitsraum nicht abdecken können und andererseits die Massen der handzuhabenden Bauteile serielle Manipulatoren ausschließen. Als mögliches Einsatzgebiet von Seilrobotern ist hierbei der Einsatz von Seilrobotern als Regalbediengeräte, wie in Bild 1 gezeigt, im Bereich der Intralogistik zu nennen. Dies ist ein Forschungsschwerpunkt innerhalb des BMBF-Projekts “EffizienzCluster LogistikRuhr“.

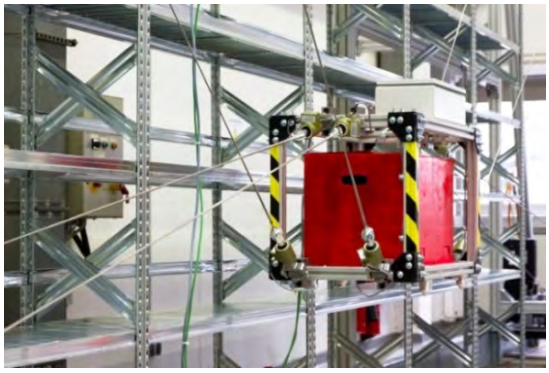


Bild 1 Prototyp eines Regalbediengeräts am Lehrstuhl für Mechatronik, Universität Duisburg-Essen

Der Beitrag ist wie folgt strukturiert: In Kapitel 2 erfolgt die dynamische Modellierung von Seilrobotern unter Berücksichtigung von passiven Elementen. Die strukturbedingt einseitigen Bindungen in den Seilen müssen berücksichtigt werden, die das Aufrechterhalten von Zugkräften in den Seilen erfordern. Zu diesem Zweck beschreibt Kapitel 3 einen Echtzeit-fähigen Optimierungsalgorithmus auf Basis der Lösung der inversen Dynamik. Kapitel 4 beschreibt das zugrundeliegende Optimierungsproblem und definiert eine mögliche Strategie zur Generierung von Energie-optimalen Trajektorien für Seilroboter unter Verwendung von passiven Elementen. Das verwendete Regelungskonzept auf Basis von Seillängen und unter der Verwendung von gültigen Seilkraftverteilungen ist in Kapitel 5 beschrieben. Weiter berücksichtigt dieses Regelungskonzept die Kompensation von Nichtlinearitäten wie z.B. Reibungseffekten, die sich negativ auf das Bahnverfolgungsvermögen des Endeffektors auswirken und somit zu einem unnötigen Energieverbrauch beitragen. Die beschriebene Methode zur Generierung von Energie-optimalen Trajektorien wird in Kapitel 5 auf Basis eines Seilroboters analysiert und bezüglich der Minimierung des Energiebedarfs, sowie der Reduzierung der Zykluszeit bewertet. Abschließend werden die experimentellen Ergebnisse in Kapitel 6 zusammengefasst.

2 Bewegungsgleichungen

Nachfolgend werden die Bewegungsgleichungen für einen Seilroboter, einschließlich Winden mit vorgespannten Federn hergeleitet. Diese Gleichungen bilden den Ausgangspunkt zur Auslegung der passiven Elemente hinsichtlich der Minimierung des Energieverbrauchs des Antriebssystems.

2.1 Endeffektor

Seilroboter können als Kraft-geregelte Mehrkörpersysteme (MKS) betrachtet werden, bestehend aus einer Arbeitsplattform (Endeffektor), die mittels flexiblen Seilen in einer parallel Konfiguration entlang einer gewünschten Bahn geführt wird. Hierdurch handelt es sich um mehrschleifige Mechanismen deren Bewegung Zwangskräften unterliegen. Wie in [5] beschrieben können die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Lagrange'schen Gleichung erster Art hergeleitet werden. Hierfür muss ein Seilroboter in dessen Baumstruktur mit separiertem Endeffektor (EE) vorliegen. Die Bewegung des Mechanismus ist durch n generalisierte Gelenkkoordinaten $\mathbf{q} \in \mathbb{V}^n$ festgelegt, die weiter in aktive (Seillängen $\mathbf{l}$) und passive (Schwenkwinkel α und β) Gelenkkoordinaten separiert werden können. Hierin beschreiben $\delta \in \mathbb{N}$ EE-Koordinaten $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}\mathbf{o} & \phi\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ gemäß der Pose $\mathbf{o}$ and Orientierung ϕ, mit Bezug auf ein lokales Koordinatensystem $\mathcal{P}$, die Bewegung des Endeffektors. Basierend auf den Kardanwinkeln ψ, ϑ und φ erfolgt die Beschreibung der Orientierung des Endeffektors mittels der Rotationsmatrix $\mathbf{R}$ bezüglich des Inertialsystems $\mathcal{B}$.
Die vollständigen Bewegungsgleichungen können durch das gedankliche Aufschneiden der einzelnen kinematischen Ketten (Seile) eines Seilroboters am Endeffektor und

durch das Einführen von redundanten geometrischen und kinematischen Schließbedingungen erhalten werden:

$$\mathbf{0} = \mathbf{h}\left(\mathbf{q}, \mathbf{o}, \phi\right) , \tag{1}$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{J}\left(\mathbf{q}\right)\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_{\mathrm{X}}\left(\phi\right)\dot{\mathbf{x}} , \tag{2}$$

worin $\mathbf{h}\left(\mathbf{q}, \mathbf{o}, \phi\right)$ die Vorwärtskinematik jeder einzelnen kinematischen Kette beschreibt. Hierfür gilt es entsprechend ein Vektorzug zwischen Seilaustrittspunkt an einer Umlenkrolle und dem Massenmittelpunkt des Endeffektors aufzustellen. Unter der Annahme, dass die Seile über Umlenkrollen in den Arbeitsraum geführt werden, kann die Seillänge $\mathbf{l}_i$ folgendermaßen berechnet werden:

$$\mathbf{l}_i = \mathbf{b}_i + \mathbf{d}_i - \mathbf{p}_i , \quad i = 1, \ldots, m , \tag{3}$$

worin der Vektor $\mathbf{b}$ die Aufhängungspunkte der Umlenkrollen beschreibt und der Vektor $\mathbf{p}$ definiert die Seilanknüpfungspunkte an der Plattform, die mit Hilfe der zuvor definierten Rotationsmatrix $\mathbf{R}$ in das Inertialsystem $\mathcal{B}$ überführt werden können:

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{o} + \mathbf{R}\,{}^{P}\mathbf{p}_i , \quad i = 1, \ldots, m . \tag{4}$$

Der in einem lokalen Referenzsystem $\mathcal{G}$ beschriebene Seilaustrittspunkt $\mathbf{d}_i$ kann unter der Berücksichtigung der Schwenkwinkel α und β wie folgt berechnet werden:

$$\mathbf{d}_{\mathcal{G}} = \begin{bmatrix} \rho_i \cos\alpha_i \left(1 + \sin\beta_i\right) \\ \rho_i \sin\alpha_i \left(1 + \sin\beta_i\right) \\ -\rho_i \cos\beta_i \end{bmatrix} , \quad i = 1, \ldots, m . \tag{5}$$

Die gedanklich durchzuführenden Schnitte, mit denen die Baumstruktur des Mechanismus erhalten werden können, ist in Bild 2 veranschaulicht. Die Anzahl an fundamentalen Schleifen ist hierbei maßgeblich durch die Anzahl der aktiv angetriebenen Seile definiert:

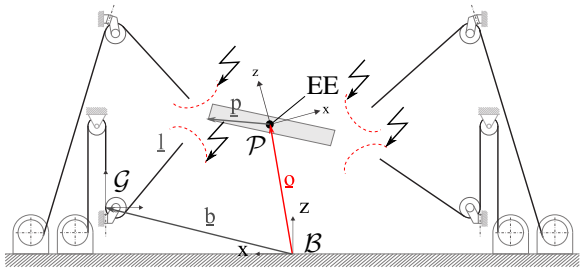


Bild 2 Kinematik eines Seilroboters

Mit den n externen Stellkräften $\mathbf{u}$ bezüglich der Gelenkkoordinaten, mit denen der Mechanismus entlang einer Trajektorie $\mathbf{x}$ geführt wird, ergeben sich die vollständigen Bewegungsgleichung zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q} \\ \mathbf{M}_{\mathrm{X}}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_{\mathrm{X}}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{Q}_{\mathrm{X}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{0}_{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{J}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{J}_{\mathrm{X}}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \lambda , \tag{6}$$

worin $\mathbf{D}$ die diagonal besetzte Trägheitsmomentenmatrix gemäß den Winden darstellt und $\mathbf{Q}$ beinhaltet alle sonstigen Kräfte wie z.B. Reibungskräfte. Die mit dem Index X gekennzeichneten Elemente beinhalten die Anteile für die Bewegungsgleichungen des Endeffektors. Folglich die Massenmatrix $\mathbf{M}_{\mathrm{X}}$ des Endeffektors, die Coriolis- and Kreiselkräfte sind in der Matrix $\mathbf{K}_{\mathrm{X}}$ zusammengefasst und die Matrix $\mathbf{Q}_{\mathrm{x}}$ beinhaltet die Potentialkräfte. Mit den Lagrange Multiplikatoren λ werden die verallgemeinerten Zwangskräfte berücksichtigt.

Die Menge aller gültigen Konfigurationen, die durch die geometrischen Zwangsbedingungen festgelegt sind, beschreiben den Konfigurationsraum des Mechanismus $\mathcal{V} := \{\mathbf{q} \in \mathbb{V}^n \,|\, \mathbf{h}\left(\mathbf{q}, \mathbf{o}, \phi\right) = \mathbf{0}\}$ [5]. Basierend auf der Jacobimatrix $\mathbf{J}$ der Zwangsbedingungen, die außerhalb von singulären Stellungen vollen Rang n besitzt, kann unmittelbar die Parametrisierung der generalisierten Gelenkgeschwindigkeiten angegeben werden:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \mathbf{F}\dot{\mathbf{x}}, \qquad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{J}_{\mathrm{X}} \\ \mathbf{I}_{\delta} \end{bmatrix} \tag{7}$$

In einem nächsten Schritt gilt es, das sogenannte Orthogonalkomplement $\mathbf{F}$ von $\begin{bmatrix}\mathbf{J} & \mathbf{J}_{\mathrm{X}}\end{bmatrix}$ zu definieren, welches folgende Bedingung erfüllt: $\begin{bmatrix}\mathbf{J} & \mathbf{J}_{\mathrm{X}}\end{bmatrix}\mathbf{F} \equiv \mathbf{0}$. Durch die Projektion der Bewegungsgleichungen (6) in den Konfigurationsraum $\mathcal{V}$, unter Einsatz von $\mathbf{F}$, können die unbekannten Zwangskräfte λ eliminiert werden. Aufgrund dessen, dass der Vektor der externen Stellkräfte $\mathbf{u}$ nur hinsichtlich der m angetriebenen Gelenkkoordinaten (Seillängen) Elemente ungleich null aufweist, kann somit eine Untermatrix $\mathbf{A}$ des Orthogonalkomplements $\mathbf{F}$ aufgestellt werden, sodass

$$\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{0}_{\delta} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{c} ,$$

gilt. Hierin stellt $\mathbf{c} \equiv (c_1, \ldots, c_m)$ ein Vektor der generalisierten Steuerkräfte gemäß den angetriebenen Gelenkkoordinaten in Form von Seilkräften $\mathbf{f}$ dar. Unter der Zuhilfenahme der Parametrisierung aus Gl. (7) und deren zeitlichen Ableitungen

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{x}} , \tag{8}$$

können die in EE-Koordinaten formulierten Bewegungsgleichungen für einen Seilroboter hergeleitet werden:

$$\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\,\ddot{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{K}}\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\right)\dot{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{q})\,\mathbf{f} , \tag{9}$$

mit

$$\overline{\mathbf{M}} := \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\left[\mathrm{diag}\left\{\mathbf{D}, \mathbf{M}_{\mathrm{X}}\right\}\right]\mathbf{F} ,$$

$$\overline{\mathbf{K}} := \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\left[\mathrm{diag}\left\{\mathbf{0}_m, \mathbf{K}_{\mathrm{X}}\right\}\mathbf{F} + \mathrm{diag}\left\{\mathbf{D}, \mathbf{M}_{\mathrm{X}}\right\}\dot{\mathbf{F}}\right] ,$$

$$\overline{\mathbf{Q}} := \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \quad \mathbf{Q}_{\mathrm{X}}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} .$$

In Gl. (9) stellt die Matrix $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ die sogenannte Strukturmatrix dar, die vollen Rang δ besitzt und die weiter den Einfluss der Seilkräfte $\mathbf{f}$ auf die Bewegung des Endeffektors beschreibt. Darüber hinaus kann mithilfe der Strukturmatrix $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ der Antriebsfreiheitsgrad (DOA) $\alpha = \mathrm{rank}\left(\mathbf{A}\right)$ angegeben werden. Der Grad der Antriebsredundanz (DOR) ist definiert durch $\rho := m - \alpha$. Somit gibt der Antriebsfreiheitsgrad α darüber Auskunft, wie viele generalisierte Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{x}}$ von der eingesetzten Regelung erreicht werden können [5]. Wie beschrieben muss eine vollständige Verspannung der Seile zu jedem Zeitpunkt innerhalb der Bewegung des Endeffektors entlang einer Trajektorie garantiert sein. Aus diesem Grund muss der Grad der Antriebsredundanz folgende Bedingung erfüllen: $\rho \geq 1$.

2.2 Passive Elemente

Wie eingangs beschrieben kann der Energieverbrauch eines Seilroboters durch den Einsatz von passiven Elementen in Form von Kontergewichten und vorgespannten Federn minimiert werden. Ausgehend von vordefinierten Trajektorien erfolgt deren Parametrisierung. Im Anwendungsfall einer Pick-&-Place-Aufgabe werden diese Trajektorien als Einzelspiele (Trajektorie des Endeffektors von Punkt A zu Punkt B und zurück zu Punkt A) definiert. In Bild 3 ist die konstruktive Erweiterung der motorgetriebenen Winden eines Seilroboters um Kontergewichte und vorgespannten Federn veranschaulicht:

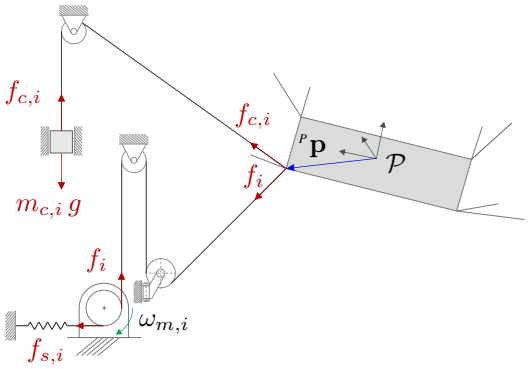


Bild 3 Wirkungsprinzip der passiven Elemente in Form von Kontergewichten und vorgespannten Federn

Wird der Endeffektor durch Kontergewichte der Massen $\mathbf{m}_\mathrm{c}$ vorgespannt, resultiert daraus der, durch die Kontergewichte auf den Endeffektor aufgebrachte Kraftwinder:

$$\mathbf{w}_\mathrm{c} = \mathbf{A}_\mathrm{c}^\mathrm{T}\,\mathbf{m}_\mathrm{c}\cdot \mathrm{g}\,, \tag{10}$$

worin $\mathbf{A}_\mathrm{c}^\mathrm{T}$ die Strukturmatrix bezüglich der Seilanknüpfungspunkte der angebundenen Kontergewichte ist und der Skalar g definiert die Gravitationsbeschleunigung in negativer z-Richtung. Somit muss das Antriebssystem den reduzierten Kraftwinder $\mathbf{w}_\mathrm{ac}$ aufbringen, mit dem der Endeffektor entlang einer vorgegebenen Trajektorie $\mathbf{x}$ bewegt werden soll: $\mathbf{w}_\mathrm{ac} = \mathbf{w}_\mathrm{EE} - \mathbf{w}_\mathrm{c}$. Ziel der Optimierung ist es, die Kontergewichte so zu dimensionieren, dass der benötigte Energiebedarf des Antriebssystems für eine vorgegebene Trajektorie minimiert wird.
Neben Kontergewichten können auch vorgespannte Federn zur Energieeffizienzsteigerung eines Seilroboters beitragen. Dabei werden die motorgetriebenen Winden durch Torsionsfedern vorgespannt, die unmittelbar auf die Winden wirken. Die durch die vorgespannten Torsionsfedern wirkenden Kräfte $\mathbf{f}_\mathrm{s}$ berechnen sich zu

$$\mathbf{f}_\mathrm{s} = \mathbf{k}\cdot\Big(\Delta\mathbf{s} + \mathbf{l}_0 - \mathbf{l}(t)\Big)\,. \tag{11}$$

Darin beschreibt der Vektor $\mathbf{k}$ die justierbaren Federkonstanten, $\Delta\mathbf{s}$ definiert die aufgewickelten Seillängen und damit die vorgespannten Federlängen, $\mathbf{l}_0$ sind die Seillängen zum Zeitpunkt $t = 0$, bei der sich der Endeffektor in dessen Ausgangslage befindet und $\mathbf{l}(t)$ stellen die Seillängen zum Zeitpunkt $t \in [0, t_\mathrm{f}]$ dar. Zur Berechnung der Vorspannungswinkel ω wird der Zusammenhang $\Delta\mathbf{s} = \mathrm{R}\cdot\omega$ verwendet, wobei R der Windenradius ist. Somit muss das Antriebssystem die verminderten Seilkräfte $\mathbf{f}_\mathrm{as}$ aufbringen, welche sich aus der Lösung der inversen Dynamik aus Gl. (12) ergeben, mit denen der Endeffektor entlang einer vorgegebenen Trajektorie $\mathbf{x}$ geführt wird: $\mathbf{f}_\mathrm{as} = \mathbf{f} - \mathbf{f}_\mathrm{s}$.
Im weiteren Verlauf werden weiter nur noch passive Elemente in Form von vorgespannten Federn betrachtet.

3 Seilkraftverteilung

Aufgrund der unilateralen Eigenschaften von Seilen benötigt ein Seilroboter wenigstens ein Seil mehr als vorhandene Bewegungsfreiheitsgrade (DOF) zur vollständigen Verspannung und somit zur Aufrechterhaltung der Seilkräfte innerhalb der Bewegung des Endeffektors. In diesem Fall ($\rho > 0$) besitzt die Strukturmatrix $\mathbf{A}^\mathrm{T} \in \mathbb{V}^{n\times m}$ keine quadratische Form und deren Kern (Nullraum) besitzt die Dimension ρ. Dies resultiert in einem unterbestimmten Gleichungssystem mit einer unendlichen Anzahl an möglichen Seilkraftverteilungen $\mathbf{f} \in \mathbb{V}^m$ und kann somit nicht eindeutig gelöst werden. Hieraus können Seilkraftverteilungen $\mathbf{f}$ gefunden werden, die im Nullraum von $\mathbf{A}^\mathrm{T}$ liegen und die keinen Einfluss auf die Bewegung des Endeffektors nehmen. Jedoch können diese Kräfte dazu verwendet werden, einen definierten Verspannungszustand in den Seilen zu garantieren. Das Problem der inversen Dynamik definiert sich somit aus der Berechnung gültiger Seilkraftverteilungen $\mathbf{f}$ für eine gegebene Trajektorie $\mathbf{x}$ [5]:

$$\mathbf{f} = \left(\mathbf{A}^\mathrm{T}\right)^+\left(\overline{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{K}}\dot{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{Q}}\right) + \mathbf{N}_{\mathbf{A}^\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}\,. \tag{12}$$

Unter der Zuhilfenahme der Pseudoinversen $\left(\mathbf{A}^\mathrm{T}\right)^+$ erfolgt die Verteilung des Kraftwinders $\mathbf{w}$ aus Gl. (9) hinsichtlich der m aktiven Gelenkkoordinaten. Die hieraus resultierenden Kräfte sind im Vektor $\mathbf{f}_\mathrm{p}$ zusammengefasst und stellen die partikuläre Lösung dar. Es gilt weiter anzumerken, dass diese Kräfte auch negative Werte annehmen können. Der Nullraum-Operator $\mathbf{N}_{\mathbf{A}^\mathrm{T}} \in \mathbb{V}^{n\times r}$ erzeugt die zur Verspannung notwendigen Nullraumkräfte. Die Skalierung dieser Kräfte erfolgt durch den Parameter $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{V}^r$ [5]. Diese Kräfte stellen die homogene Lösung dar und sind im Vektor $\mathbf{f}_\mathrm{h}$ zusammengefasst.
Darüber hinaus muss die Seilkraftverteilung $\mathbf{f}$ folgender Ungleichungsnebenbedingung genügen:

$$\mathbf{0} \le \mathbf{f}_\mathrm{min} \le \mathbf{f} \le \mathbf{f}_\mathrm{max}\,. \tag{13}$$

Darin stellt $\mathbf{f}_\mathrm{min}$ eine untere Seilkraftgrenze zur Aufrechterhaltung eines Verspannunszustandes der Seile dar, während eine maximale Arbeitslast der Seile bzw. das maximale Drehmoment der motorgetriebenen Winden durch $\mathbf{f}_\mathrm{max}$ definiert ist.
Zur Berechnung gültiger Seilkräfte $\mathbf{f}$ kommt in dieser Arbeit eine sogenannte *Active-Set Methode*, basierend auf der Arbeit [6] von D. Goldfarb und A. Idnani, zum Einsatz. Hierbei kann Gl. (12) als ein quadratisches Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen interpretiert werden [7]:

$$\begin{aligned} &\min_{\boldsymbol{\mu}_1\,\cdots\,\boldsymbol{\mu}_\mathrm{r}} ||\boldsymbol{\mu}||^2 \\ &s.t.\ \ \mathbf{f}_\mathrm{min} - \mathbf{f}_\mathrm{p} \le \mathbf{N}_{\mathbf{A}^\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu} \le \mathbf{f}_\mathrm{max} - \mathbf{f}_\mathrm{p}\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Die Arbeitsweise der eingesetzten *Active-Set Methode* be-

züglich des Problems der inversen Dynamik aus Gl. (12) für einen Seilroboter mit acht Seilen und zweifacher Antriebsredundanz ($r = 2$) ist beispielhaft in Bild 4 veranschaulicht. Demgemäß kann die Lösungsmenge als Ebene dargestellt werden:

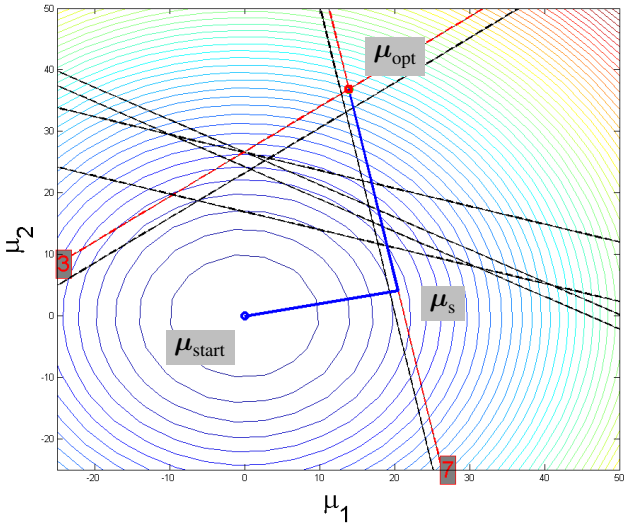


Bild 4 Lösungsmenge für einen Seilroboter mit acht Seilen

Eine der bemerkenswertesten Eigenschaften dieser Methode liegt in der Wahl der Anfangswerte für die zu minimierenden Parameter $\boldsymbol{\mu}$. Die Anfangswerte für $\boldsymbol{\mu}$ können in diesem speziellen Fall gleich dem Nullvektor gewählt werden. Hierbei ist anzumerken, dass diese nicht innerhalb gültiger Seilkraftgrenzen liegen. Ausgehend von einem Startwert $\boldsymbol{\mu}_{\text{start}}$ erfolgt die Auswahl einer Nebenbedingung mit dem größten Wert. Bezüglich dieses Beispiels erfolgt anfangs ein Sprung gekennzeichnet mit $\boldsymbol{\mu}_{\text{s}}$ senkrecht auf Nebenbedingung 7. Hierbei handelt es sich um das untere Seilkraftniveau von Seil 7. Hiernach verläuft die Suche nach dem Optimum entlang der ausgewählten Nebenbedingung. Diese Nebenbedingung bleibt solange aktiv (rote Linie) bis im weiteren Verlauf eine andere Nebenbedingung einen größeren Wert annimmt. Sollte dies der Fall sein, erfolgt ein Sprung auf diese Nebenbedingung. Der Algorithmus läuft somit entlang aktiver Nebenbedingung bis das Optimum $\boldsymbol{\mu}_{\text{opt}}$ gefunden ist.
Diese Methode zeichnet sich weiter durch zwei markante Vorteile aus: Zum einen ermöglicht diese die Berechnung einer minimalen Seilkraftverteilung und zum anderen stellt diese ein effizientes Optimierungsverfahren dar. Durch die abschätzbare Anzahl an Iterationen kann dieses Verfahren demzufolge auf einem Echtzeit-fähigen Betriebssystem implementiert werden. Zudem kann diese Methode, ohne nennenswerten Mehraufwand, weiter auf höher redundante Seilroboter ($r > 2$) angewendet werden.

4 Energie-optimale Trajektorien

In diesem Kapitel wird zunächst eine allgemeine Vorgehensweise zur mathematischen Berechnung von Bahnkurven beschrieben. Anschließend wird das zugrundeliegende Optimierungsproblem geschildert und der verwendete Optimierungsalgorithmus erläutert. Schlussendlich wird die iterative Optimierungsstrategie in mehreren Schritten detailliert vorgestellt.

4.1 Trajektorienplanung

Mithilfe der Trajektorienplanung wird die geometrische Bahn des Endeffektors zwischen zwei Punkten im Raum in Abhängigkeit zur Laufzeit t beschrieben. Hierbei können die zugrundeliegenden Trajektorien durch Polynome höherer Ordnung dargestellt werden:

$$q(t) = \mathrm{a}_0 + \mathrm{a}_1 t + \mathrm{a}_2 t^2 + \ldots + \mathrm{a}_{n-1} t^{n-1} + \mathrm{a}_n t^n \quad (15)$$

Der Grad n des Polynoms hängt von der Anzahl der Randbedingungen ab, die direkt aus der gewünschten Bewegungsaufgabe resultieren. Für n Randbedingungen wird ein Polynom vom Grad $n-1$ benötigt. Die Randbedingungen führen dabei auf ein Gleichungssystem durch das sich die Koeffizienten a_i des Polynoms berechnen lassen. In den meisten Fällen wird für jeden Freiheitsgrad der Bewegungsaufgabe ein eigenes Polynom bestimmt.

4.2 Optimierungsproblem

Zum Nachweis der Reduzierung des Energiebedarfs durch die in dieser Arbeit beschrieben Methode zur Generierung von Energie-optimalen Trajektorien soll die mechanische Energie aller motorgetriebenen Winden ermittelt werden und dient dem zugrundeliegenden Optimierungsverfahren als skalare Kostenfunktion:

$$\min_{\mathbf{f}_{\text{s}}, t_{\text{f}}, \mathbf{a}} \; \mathrm{E}_{\text{mech}} = \int_0^{t_f} \mathbf{f}_{\text{as}}(t)\, \dot{\mathbf{l}}(t)\, \mathrm{d}t\,. \quad (16)$$

Weiter gilt es die Rekuperationsfähigkeit moderner Antriebssystem mit bei der Berechnung des Gesamtenergiebetrags zu berücksichtigen. Durch diese Festlegung der Kostenfunktion als Bewertungskriterium für den verwendeten Optimierungsalgorithmus, muss lediglich ein skalarer Wert E_{mech} minimiert werden, sodass die benötigte Rechenzeit reduziert werden kann.
Für die Optimierung dient der in [8] beschriebene *Particle Swarm Optimization Algorithmus* (PSO). Hierbei handelt es sich um einen evolutionären Optimierungsalgorithmus zur Lösung von Optimierungsproblemen mit linearen und nichtlinearen Randbedingungen. Der PSO Algorithmus bedient sich bei der Optimierung einer abstrakten Folge von Teilschritten (Metaheuristik) auf der Suche nach dem Optimum und kann demzufolge auf beliebige Problemstellungen angewandt werden.
Aus diesem Grund eignet er sich besonders für komplizierte kombinatorische Problemstellungen, die mit relativ geringem Rechenaufwand und in kurzer Zeit optimiert werden sollen. Allerdings hängt die Berechnungszeit und die Qualität der Ergebnisse stark von der Auswahl von Startwerten und definierten Randbedingungen innerhalb der auszuführenden Optimierungsschritte ab. Aus diesem Grund muss die Auswahl der zu optimierenden Parameter und Randbedingungen sinnvoll ausgewählt werden. Weiterhin ist zu beachten, dass es keine Garantie für das Erreichen eines globalen Optimums gibt.
Hierbei ist der PSO Algorithmus an die Bewegungen von

Tieren, die sich in Schwärmen fortbewegen, angelehnt. Jedes Partikel versucht dabei seinen optimalen Platz im Suchraum zu finden und weiter einen Gewinn für die ganze Gruppe zu erzielen. Dabei wird die Änderung von Richtung und Geschwindigkeit eines Partikels durch das Streben nach dem persönlichen Optimum, dem Streben nach dem globalen (sozialen) Optimum und von seiner Trägheit, die es auf der aktuellen Bahn halten will, bestimmt. Eine hohe Trägheit sorgt dabei zu Beginn der Optimierung für eine möglichst gute Erschließung des definierten Lösungsraumes.

4.3 Auslegungsstrategie

Zur Vereinfachung des zugrundeliegenden Optimierungsproblems, sowie einer Reduzierung der Rechenzeit, sollen die Optimierungsvariablen Federparameter, Spielzeit und Bahnkurve in Teilschritten optimiert werden. Nachfolgend werden die einzelnen Schritte des iterativen Optimierungsansatzes detailliert beschrieben:

(1) Federparameter

Im ersten Teilschritt erfolgt die Anpassung der Federparameter, in Form von Federsteifigkeiten $\mathbf{k}$ und Vorspannungen $\mathbf{f}_{\mathrm{s_{vor}}}$, hinsichtlich eines minimalen Energieverbrauchs für ein gegebenes Einzelspiel. In diesem Teilschritt gilt es folgende Kostenfunktion mit den angeschriebenen Variablen zu minimieren:

$$\min_{\mathbf{k},\mathbf{f}_{\mathrm{s_{vor}}}} \; \mathrm{E_{mech}} = \int_0^{t_f} \mathbf{f}_{\mathrm{as}}(t)\, \dot{\mathbf{l}}(t)\, \mathrm{d}t\,. \tag{17}$$

Der benötigte Energiebedarf des Antriebssystems $\mathrm{E_{mech}}$ hängt entscheidend von der in den Federn gespeicherten potentiellen Energie ab. Diese Energie wird den motorgetriebenen Winden zur Verfügung gestellt und somit in kinetische Energie umgewandelt. Hierbei bestimmt die freigewordene kinetische Energie die Eigenbewegung des Endeffektors. Diese ist jedoch nicht nur von den oben genannten Federparametern, sondern ebenfalls von der festgelegten Bahnkurve abhängig. Genau diese Fähigkeit der Eigenbewegung gilt es in den weiteren Optimierungsschritten auszunützen. Weiter müssen Randbedingungen innerhalb der Optimierung definiert werden, die die Federparameter über die Bahnkurve zueinander in Verbindung setzen.
Bei der Optimierung der Vorspannungen $\mathbf{f}_{\mathrm{s_{vor}}}$, für eine gegebene Feder und gegebener Bahnkurve, dürfen die maximal angegebenen Federkräfte $\mathbf{f}_{\mathrm{s_{max}}}$ nicht überschritten werden. Außerdem sollen die Federn zu jedem Zeitpunkt eine minimal positive Kraft $\mathbf{f}_{\mathrm{s_{min}}}$ auf die Seile ausüben. Andernfalls kommt es zu einer Beschädigung der vorgespannten Federn.
Bei der Optimierung der Federparameter $\mathbf{k}$ und $\mathbf{f}_{\mathrm{s_{vor}}}$ muss weiter darauf geachtet werden, dass die Optimierungsergebnisse auf technisch realisierbare Torsionsfedern und weiter zu einer Beachtung von technischen Grenzen (maximale Federkraft) führen. Aus diesem Grund muss die maximal mögliche Federbewegung der zugrundeliegenden Federn mit bei der Berechnung der maximalen Federkräfte $\mathbf{f}_{\mathrm{s_{max}}}$ berücksichtigt werden. Nachfolgend werden alle definierten Randbedingungen zur Parametrisierung des Optimierungsverfahrens aufgelistet:

$$\Delta\mathbf{l}_{\mathrm{max}_i} \cdot \mathbf{k}_i \leq \mathbf{f}_{\mathrm{s_{vor}}_i}\,, \quad i = 1, \ldots, m\,, \tag{18}$$

$$\mathbf{f}_{\mathrm{s_{max}}} + \Delta\mathbf{l}_{\mathrm{min}_i} \cdot \mathbf{k}_i \geq \mathbf{f}_{\mathrm{s_{vor}}_i}\,, \quad i = 1, \ldots, m\,. \tag{19}$$

Hierbei gilt es folgende Bedingungen zu berücksichtigen: $\Delta\mathbf{l}_{\mathrm{max}} \geq \mathbf{0}$ und $\Delta\mathbf{l}_{\mathrm{min}} \leq \mathbf{0}$. Darin bezeichnet $\Delta\mathbf{l}(t)$ die Differenz aus den momentanen Seillängen $\mathbf{l}(t)$ und den Seillängen $\mathbf{l}_0$ bezüglich der Ausgangslage des Endeffektors. Zur Berücksichtigung, dass der Endeffektor von seiner Ausgangslage zum ersten Bahnpunkt fahren muss, wurden weitere Randbedingungen eingeführt, mit denen sichergestellt ist, dass innerhalb dieser Bewegung keine Verletzung der minimalen und maximalen Federkräfte auftritt.

(2) Spielzeit

Die Verwendung von vorgespannten Federn in der Anwendung auf Seilroboter ist, wie eingangs beschrieben, für fest vorgegebene Bahnkurven, bei der die Eigenbewegung aufgrund der in den Federn gespeicherten Energie keine Berücksichtigung findet, nicht sinnvoll. Darüber hinaus kann es weiter unter dieser Missachtung zu einer Erhöhung des Energiebedarfs $\mathrm{E_{mech}}$ hinsichtlich des Antriebssystems kommen. Aus diesem Grund soll in diesem Teilschritt eine Anpassung der Zykluszeit t_f für die zugrundeliegende Bahnkurve derart erfolgen, dass die Zykluszeit t_f der Eigenbewegung eines Seilroboters, infolge der von den vorgespannten Federn eingebrachten Energie, entgegenkommt. Wie im ersten Teilschritt soll der gesamte Energiebedarf $\mathrm{E_{mech}}$ hinsichtlich des Antriebssystems als Kostenfunktion für die Optimierung dienen:

$$\min_{t_\mathrm{f}} \; \mathrm{E_{mech}} = \int_0^{t_\mathrm{f}} \mathbf{f}_{\mathrm{as}}(t)\, \dot{\mathbf{l}}(t)\, \mathrm{d}t\,. \tag{20}$$

Je näher die zugrundeliegende Bahnkurve, sowie deren zeitliche Anpassung an die Eigenbewegung des Seilroboters heranreicht, umso weniger Energie müssen die motorgetriebenen Winden aufbringen, mit der der Endeffktor auf der gewünschten Bahn gehalten wird. Aus diesem Grund können in diesem Teilschritt, sowohl die Zykluszeit t_f, als auch der Energiebedarf $\mathrm{E_{mech}}$ zur Ausführung der vordefinierten Bahnkurve optimiert werden.
In diesem Schritt beziehen sich die Randbedingungen auf eine minimale und maximale Zykluszeit t_f, die hinsichtlich der maximalen Bewegungseigenschaften eines Seilroboters, wie z. B. der maximal möglichen Beschleunigung, zu definieren sind.

(3) Bahnkurve

In einem letzten Schritt erfolgt schließlich die Anpassung der Bahnkurve zwischen Start- und Endpunkt der Bahnkurve. Dabei werden neben den mindestens sechs benötigten Randbedingungen für Start- und Endpunkt eines Freiheitsgrades

$$q(t_0) = q_0,\; \dot{q}(t_0) = q_0' = 0,\; \ddot{q}(t_0) = q_0'' = 0, \tag{21}$$

$$q(t_f) = q_f,\; \dot{q}(t_f) = q_f' = 0,\; \ddot{q}(t_f) = q_f'' = 0, \tag{22}$$

zwei weitere Randbedingungen (Stützstellen) mit variabler, zu optimierender Amplitude $\hat{\mathbf{p}}$, aber fest definierten Zeitpunkten $\frac{1}{3} \cdot t_\mathrm{f}$ und $\frac{2}{3} \cdot t_\mathrm{f}$, hinzugefügt.
Innerhalb einer Pick-&-Place-Aufgabe wird im allgemeinen eine Bewegung mit mindestens zwei Freiheitsgraden ausgeführt. Hierzu gilt es dann ebenfalls mindestens zwei weitere Polynome zur Beschreibung der Bahnkurve hinzuzufügen. Mithilfe dieser Polynome erfolgt die Beschreibung der Bahnkurve des Endeffektors entlang der x- bzw. der y-Richtung in Abhängigkeit der Bearbeitungsebene, während ein Polynom den Verfahrweg entlang einer der Flächennormalen beschreibt. In diesem Teilschritt gilt es weitere Randbedingungen zu definieren, die hierbei zum Verfügung stehenden Arbeitsraum eines Seilroboters konform sind. Hierdurch soll verhindert werden, dass der Endeffektor den gültigen Arbeitsraum verlässt bzw. in Kontakt mit dessen Umgebung tritt. Eine schematische Darstellung der eingesetzten Bahnkurve ist in Bild 5 veranschaulicht. Hierin sind weiter alle Stützstellen angegeben und die getroffenen Randbedingung können aus dieser Abbildung entnommen werden:

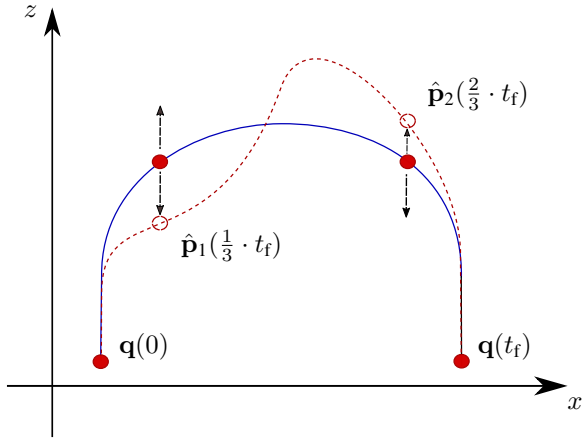


Bild 5 Schematische Darstellung der Bahnkurvenanpassung

Hierbei ist anzumerken, dass bei einer Bewegungen innerhalb der drei translatorischen Freiheitsgraden des Endeffektors, die zugrundeliegende Bahnkurve in der xy-Ebene durch eine Projektion auf eine der Koordinatenachsen über Rotationsmatrizen ebenfalls mit zwei Polynomen beschrieben werden kann.
Im vorliegenden Optimierungsschritt ist eine Eigenbewegung nur in Richtung der Flächennormalen möglich. Deshalb werden die Stützstellen nur für das Polynom in z-Richtung optimiert. Dabei muss beachtet werden, dass durch die Anpassung der Bahnkurve auch die maximalen Federkräfte $\mathbf{f}_{\mathrm{s}_{\max}}$, derart verändert werden können, dass die zuvor angegebenen Randbedingungen für die Federparameter aus Gl. (18)-(19) verletzt werden können. Um eine Beschädigung der vorgespannten Federn zu verhindern ist deshalb eine erneute Optimierung der Federparameter notwendig.

5 Regelungskonzept

Die außergewöhnlichen Eigenschaften von Seilrobotern, wie z.B. die über einen großen Arbeitsraum erreichbaren hohen Geschwindigkeiten des Endeffektors, hängen weiter maßgeblich von dem verwendeten Regelungskonzept ab. Bei dem hier verwendeten Regelungskonzept kommt eine modellbasierte Positionsregelung mit einem vorgeschalteten Störgrößenbeobachter zur Kompensation von Ungewissheiten zum Einsatz.

5.1 Störgrößenbeobachter

Der eingesetzte Störgrößenbeobachter basiert auf dem in [9] beschriebenen Verfahren zur Impuls-basierten Fehlerdetektion, ausgehend von der Idee, alle Störgrößen als ein Fehler innerhalb des motorgetriebenen Windensystems zu betrachten. Ein entscheidender Vorteil liegt darin, dass der eingesetzte Störgrößenbeobachter nahtlos in das Regelungskonzept eingefügt werden kann. Diese Aussage kann durch die in [5] angeführte Passivitätsanalyse untermauert werden.
Unter der Berücksichtigung aller Störgrößen $\boldsymbol{\eta}$, in Form von generalisierten Kräften, können die Bewegungsgleichungen für die motorgetriebenen Winden wie folgt angegeben werden:

$$\mathbf{D}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}_\mathrm{m} - \mathbf{f} - \boldsymbol{\eta}\,. \tag{23}$$

Hierin stellt $\mathbf{f}_\mathrm{m}$ die kommandierten Kräfte bezüglich der motorgetriebenen Winden dar.
Die ausschlaggebende Quelle von Störgrößen $\boldsymbol{\eta}$ sind nicht ausschließlich Unsicherheiten in den angesetzten Bewegungsgleichungen. Der Störgrößenbeobachter ist darüber hinaus in der Lage Störgrößen in Form von Reibungskräften, die maßgeblich das Bahnverfolgungsvermögen und das Aufrechterhalten eines Verspannungsniveau in den Seilen negativ beeinflussen, zu rekonstruieren. Gleichermaßen können weitere Unsicherheiten bei der Berechnung der Federkräfte $\mathbf{f}_\mathrm{s}$ beseitigt werden.
Zur Ableitung eines Störgrößenbeobachters soll weiter, wie in [9] vorgeschlagen, der generalisierte Impuls $\mathbf{p}$ zum Einsatz kommen:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}(t)\,. \tag{24}$$

Die zeitliche Ableitung der Impulsgleichung ist gegeben durch folgenden Zusammenhang:

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{D}\ddot{\mathbf{q}}(t)\,. \tag{25}$$

Hierin können die Beschleunigungen aus Gl. (25), zur Beschreibung von $\dot{\mathbf{p}}$, durch die Bewegungsgleichungen aus Gl. (23) ersetzt werden. Zusammen mit dem generalisierten Impuls aus Gl. (24) resultieren die dynamischen Gleichungen des Beobachters, sowie die Ausgangsgleichung der rekonstruierten Störgrößen $\hat{\eta}$:

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}}(t) = \mathbf{f}_\mathrm{m} - \mathbf{f} + \mathbf{K}_\mathrm{R}\left(\mathbf{p}(t) - \hat{\mathbf{p}}(t)\right)\,, \tag{26}$$

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}(t) = \mathbf{K}_\mathrm{R}\left(\hat{\mathbf{p}}(t) - \mathbf{p}(t)\right)\,. \tag{27}$$

Über die positiv definite Verstärkungsmatrix $\mathbf{K}_\mathrm{R} > \mathbf{0}$ findet eine Rückkopplung des Beobachterfehlers $\mathbf{r} = \mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}$ statt und somit ist die asymptotische Konvergenz des Beobachterfehlers sichergestellt [5].
Unter der Zuhilfenahme von Gl. (26) kann folgender Residuenvektor zur Rekonstruktion unbekannter Störgrößen $\hat{\boldsymbol{\eta}}$

abgeleitet werden:

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}(t) = \mathbf{K}_\mathrm{R} \left[\int_0^t \left(\mathbf{f}_\mathrm{m} - \mathbf{f} - \hat{\boldsymbol{\eta}}(t) \right) \mathrm{d}t - \mathbf{p}(t) \right] . \tag{28}$$

Hierbei besitzt die Beobachterdynamik die Form

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}(t) = -\mathbf{K}_\mathrm{R} \hat{\boldsymbol{\eta}}(t) + \mathbf{K}_\mathrm{R} \boldsymbol{\eta}(t) , \tag{29}$$

welche die Form eines linearen Zeit-invarianten Systems erster Ordnung annimmt [9]. Ausgehend von dieser Darstellung kann die Fehlerdynamik aus Gl. (29) für jede Komponente des Residuenvektors aus Gl. (28) mittels folgender Übertragungsfunktion im Bildbereich beschrieben werden [5]:

$$\frac{\hat{\eta}_\mathrm{i}(s)}{\eta(s)_\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{K}_{\mathrm{R_i}}}{s + \mathrm{K}_{\mathrm{R_i}}} , \quad i = 1, \ldots, \delta . \tag{30}$$

Hieraus ist ersichtlich, dass unter der Annahme

$$\mathbf{K}_\mathrm{R} \to \infty \quad \Rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{\eta}} \approx \boldsymbol{\eta} , \tag{31}$$

der Störgrößenbeobachter an dessen Ausgang jegliche Störgrößen $\boldsymbol{\eta}$ in Form von generalisierten Kräften liefern wird.

5.2 augmentedPD-Regelung

Als geeigneter Kandidat zur Regelung der Pose eines Seilroboters hat sich die sogenannte augmentedPD-Regelung (APD) auf Basis von Gelenkkoordinaten bewährt [10]. Hierin kommt ein konventioneller PD-Regler (siehe Bild 6) zum Einsatz, welcher unter Berücksichtigung der Lösung zur inversen Kinematik aus Gl. (3), die gewünschten Seillängen $\mathbf{l}_\mathrm{d}$ für eine definierte Pose $\mathbf{x}(t)$ einregelt:

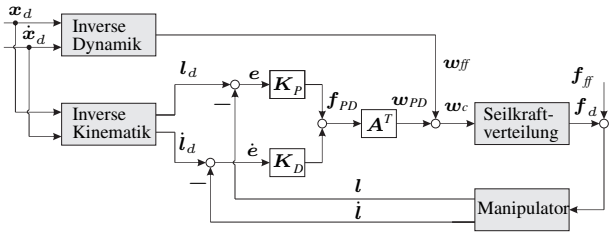


Bild 6 Blockschaltbild der augmentedPD-Regelung

Auf Basis von Gl. (9) erfolgt entsprechend der inversen Dynamik aus Gl. (12) eine Vorsteuerung der gesamten Dynamik des Endeffektors und diese ist durch den Kraftwinder $\mathbf{w}_\mathrm{ff}$ definiert. Weiter soll eine Kompensation von Reibungskräften und Massenträgheitsmomenten bezüglich der motorgetriebenen Winden mit bei der Vorsteuerung berücksichtigt werden. Diese Kräfte sind im Vektor $\mathbf{f}_\mathrm{ff}$ zusammengefasst.
Das Regelgesetz für den APD-Regler kann wie folgt angegebenen werden:

$$\mathbf{f}_\mathrm{m} = \mathbf{D}\ddot{\mathbf{q}}_\mathrm{d} + \mathbf{f}_\mathrm{opt} + \boldsymbol{\eta} . \tag{32}$$

Hierin stellt $\mathbf{f}_\mathrm{opt}$ eine gültige Seilkraftverteilung basierend auf der beschriebenen *Active-Set Methode* dar. Der zuvor beschriebene Störgrößenbeobachter trägt zur Kompensation von angreifenden Störgrößen $\boldsymbol{\eta}$ bei und liefert an dessen Ausgang entsprechend die Kräfte $\mathbf{f}_\mathrm{ff}$. Innerhalb dieses Regelungskonzeptes soll der Kraftwinder

$$\mathbf{w}_\mathrm{c} = \mathbf{w}_\mathrm{PD} + \mathbf{w}_\mathrm{ff} \tag{33}$$

zur Berechnung gültiger Seilkraftverteilungen eingeführt werden. Hierbei definiert der Kraftwinder $\mathbf{w}_\mathrm{PD} = \mathbf{A}^\mathrm{T} \left(\mathbf{K}_\mathrm{p}\mathbf{e} + \mathbf{K}_\mathrm{D}\dot{\mathbf{e}} \right)$ den Reglerausgang und $\mathbf{K}_\mathrm{p}$, sowie $\mathbf{K}_\mathrm{D}$ stellen diagonal besetzte Verstärkungsmatrizen dar und $\boldsymbol{e}$ beinhaltet die Seillängenfehler.
Durch die Projektion der Stellkräfte $\mathbf{K}_\mathrm{p}\mathbf{e} + \mathbf{K}_\mathrm{D}\dot{\mathbf{e}}$ in den Konfigurationsraum $\mathcal{V}$ können antagonistische Steuerkräfte beseitigt werden. Somit kommt es innerhalb der Bewegung des Endeffektors zu keinem ungewollten Verspannungszustand in den Seilen [10].

6 Experimente

6.1 Prototyp

Die beschriebene Methode zur Generierung von Energieoptimalen Trajektorien unter dem Einsatz von vorgespannten Federn für einen Seilroboters hinsichtlich der Minimierung des Energiebedarfs des Antriebssystems wird zum Nachweis der Funktion für den 6-DOF SEGESTA-Prototypen (siehe Abb. 7) implementiert. Dieser Seilroboter wird von einem Industrie-Regelsystem auf Basis von Beckhoff TwinCAT3 gesteuert und dessen Regelfrequenz wurde auf 2 kHz festgesetzt:

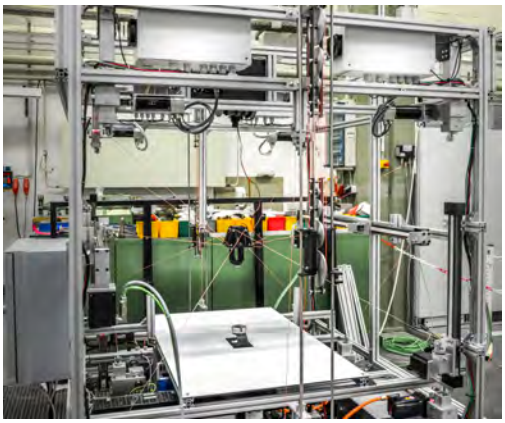


Bild 7 SEGESTA-Prototyp mit sechs Bewegungsfreiheitsgraden und zweifacher Antriebsredundanz

Der abgebildete Endeffektor des verwendeten Seilroboters wird durch acht motorgetriebene Winden (Beckhoff AM8031 Motoren) angetrieben, besitzt somit eine zweifache Antriebsredundanz und kann alle sechs Bewegungsfreiheitsgrade bedienen. Das nominelle Drehmoment dieser Motoren liegt bei $\tau_\mathrm{nom} = 1{,}2\,\mathrm{Nm}$. Die Winden sind hierbei an den Eckpunkten eines nahezu symmetrischen Quaders mit einer Dimension von $1{,}2\,\mathrm{m} \times 1{,}4\,\mathrm{m} \times 1{,}1\,\mathrm{m}$ $(b \times l \times h)$ angeordnet. Zur Messung der wirkenden Seilkräfte wurden Kraftsensoren Typ Megatron KM302 in die motorgetriebenen Winden integriert.
Die vorgespannten Torsionsfedern besitzen hierbei folgende Parameter: $\mathbf{k}_1 = 11{,}75\,\mathrm{N/m}$ und $\mathbf{k}_2 = 19{,}55\,\mathrm{N/m}$. In einem ersten Entwurfschritt sollen die Federn mit der kleineren Federsteifigkeit $\mathbf{k}_1$ bezüglich der unteren Winden bzw.

die Federn mit der größeren Federsteifigkeit $\mathbf{k}_2$ auf die oberen Winden verteilt werden. Durch den begrenzten Abrollwinkel der Federn und einer geforderter Seillänge von mindestens $\mathbf{l}_{\text{max}} = 1\,\text{m}$ wurden die Torsionsfedern mittels einem Getriebemechanismus mit einem Faktor von sechs übersetzt.

6.2 Ergebnisse

Die für die Optimierung vorgegebene Trajektorie $\mathbf{x}(t)$ (Einzelspiel) ist in Tab. 1 dargestellt. Für diese Trajektorie wurde weiter eine untere Seilkraftgrenze von $\mathbf{f}_{\text{min}} = 10\,\text{N}$ zur Aufrechterhaltung eines Verspannungszustandes in den Seilen gefordert:

Tabelle 1 Start- und Endpunkte für das angesetzte Einzelspiel

	Startpunkt [m]	Endpunkt [m]
xz-Pose	$[-0.15\ \ 0.4]^{\text{T}}$	$[0.15\ \ 0.4]^{\text{T}}$

Für das zugrundeliegende Einzelspiel wurde als Anfangswert $t_{\text{f}} = 1{,}0\,\text{s}$ gewählt. Dabei wird eine maximale Beschleunigung von $a_{\text{max}} = 10\,\text{m/s}^2$ vorgegeben, wodurch der Endeffektor innerhalb der Bewegungsaufgabe eine maximale Geschwindigkeit von $v_{\text{max}} = 2\,\text{m/s}$ erreicht.
Die Optimierung der zugrundeliegenden Parameter erfolgt wie beschrieben in drei Teilschritten und kann durch die Minimierung der Kostenfunktion aus Gl. (16) beispielsweise mit der Matlab-Funktion *PSO* [8] mit folgenden Randbedingungen erfolgen: Für die Optimierung der Federparameter wurde eine untere Beschränkung der Vorspannungskräfte $\mathbf{f}_{\text{s}_{\text{vor}}}$ bezüglich der unteren Seilkraftgrenzen $\mathbf{f}_{\text{min}}$ gefordert. Somit kompensieren die vorgespannten Federn weiter die zur vollständigen Verspannung notwendigen Antriebsmomente und tragen hierdurch maßgeblich zur Reduzierung des Energiebedarfs E_{mech} bei. Weiter wurden die Federsteifigkeit bezüglich der unteren Winden auf $\mathbf{k}_1 = 11{,}75\,\text{N/m}$ festgesetzt und somit wurden innerhalb der ersten Optimierungsphase nur die Federparameter $\mathbf{k}_2$ und $\mathbf{f}_{\text{s}_{\text{vor}}}$ bezüglich der oberen Winden durchgeführt. Darüber hinaus wurde eine minimale Zykluszeit von $t_{\text{f}} = 0{,}5\,\text{s}$ definiert und weiter wurden die Randbedingungen für die Bahnkurven bezüglich eines gültigen Arbeitsraumes auf $0{,}4\,\text{m} \leq \hat{\mathbf{p}} \leq 0{,}75\,\text{m}$ festgelegt. Innerhalb dieser Grenzen kann eine Bewegung des Endeffektors stattfinden.
Die Simulationsergebnisse basierend auf den Bewegungsgleichungen aus Gl. (9) hinsichtlich der Minimierung des Energiebedarfs E_{mech} aus Gl. (17), sowie der Zykluszeit t_{f} hinsichtlich Gl. (20) und der geforderten Bahnkurve aus Bild 5, sind in Tab. 2 zusammengefasst:

Tabelle 2 Prozentuale Reduzierung des Energiebedarfs eines Seilroboters unter dem Einsatz von vorgespannten Federn

Optimierungsschritt	t_{f} [s]	E_{mech} [J]	ϵ [%]
Ohne Optimierung	1,00	2,928	–
1. Parameteroptimierung	1,00	0,788	73,1
1. Zeitoptimierung	0,60	0,682	76,7
1. Bahnoptimierung	0,60	0,641	78,1
2. Iteration	0,58	0,545	81,4
3. Iteration	0,54	0,545	81,4

Ausgehend von ausgewählten Anfangswerten wurden insgesamt drei Optimierungsphasen zur Optimierung der festgelegten Parameter, basierend auf der in Kapitel 4 beschriebenen Auslegungsstrategie, durchlaufen. Für jeden Schritt wurde der entsprechend benötigte Energiebedarf E_{mech} eingetragen. Nach der dritten Optimierungsphase konnten folgende Parameter erhalten werden und sind in Tab. 3 zusammengefasst:

Tabelle 3 Optimierte Parameter nach Ausführung der beschriebenen Auslegungsstrategie

i	$\mathbf{k}_i$ [N/m]	$\mathbf{f}_{\text{s}_{\text{vor}i}}$ [N]	t_{f_i} [s]	$\hat{\mathbf{p}}(i \cdot t_f/3)$ [m]
1	11,75	11,69	0,54	0,555
2	22,15	10,00	0,54	0,555
3	–	14,56	–	–
4	–	10,71	–	–

Bei der Bewertung der Simulationsergebnisse fällt auf, dass die Parameter für die Bahnkurve $\hat{\mathbf{p}}$ innerhalb der Optimierungsphasen nur geringfügig angepasst wurden. Die anfangs gewählte Bahnkurve durchläuft über weite Strecken die Arbeitsraummitte des Seilroboters. In diesem Bereich besitzt dieser das größte Kraftübertragungsvermögen und schlussendlich resultieren daraus die kleinsten Seilkräfte $\mathbf{f}$, die zur Bewegung des Endeffektors benötigt werden. Dies kann ein möglicher Grund für die geringfügige Anpassung der Bahnkurve innerhalb der Optimierungsphasen darstellen.
Die anhand des SEGESTA-Prototypen erhaltenen experimentellen Ergebnisse zum Energiebedarf E_{mech} des Antriebssystems, mit und ohne dem Einsatz von vorgespannten Federn, für das Einzelspiel aus Tab. 1, sind in Bild 8 dargestellt:

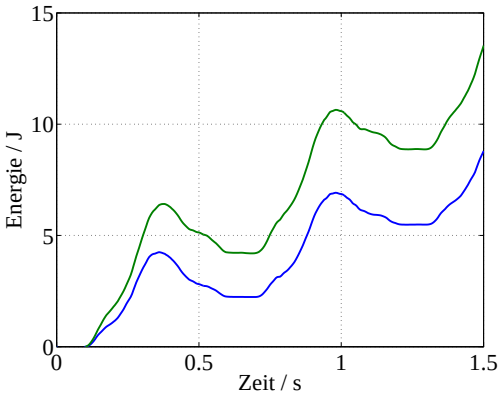


Bild 8 Energieverbrauch innerhalb eines Einzelspiels – (Grün) ohne vorgespannten Federn – (Blau) mit vorgespannten Federn

Die experimentellen Ergebnisse liefern unter dem Einsatz von vorgespannten Federn, sowie der zeitlichen und geometrischen Anpassung der vorliegenden Bahnkurve, ein Energieeinsparungspotential von bis zu 40 %. Folgende Zusammenhänge können diesen Sachverhalt erklären: In erster Hinsicht müssen die an den unteren Aufhängungspunkten platzierten motorgetriebenen Winden die zur Verspannung notwendigen Seilkräfte aufbringen. Die an diesen Winden montierten vorgespannten Federn tragen aus diesem Grund nur vermindert zu einer Eigenbewegung des Endeffektors bei. Aus diesem Grund fallen für diese Winden die Vorspannungskräfte $\mathbf{f}_{\text{s}_{\text{vor}}}$ geringer aus und weiter besitzen diese Federn eine geringere Federsteifigkeit $\mathbf{k}_1$. In einem hohen Maß tragen die an den oberen Winden mon-

tierten vorgespannten Federn zu einer Eigenbewegung des Endeffektors bei. Dies erklärt deren größere Federsteifigkeit $\mathbf{k}_2$ und die größer gewählten Vorspannungskräfte $\mathbf{f}_{s_{vor}}$. Darüber hinaus tragen diese Federn zu einer Kompensation der Masse des Endeffektors bei.
Die in Bild 9 dargestellten Drehmomentenverläufe für die einzelnen motorgetriebenen Winden zeigen gegenüber den Drehmomentenverläufen, ohne den Einsatz von vorgespannten Federn, eine deutliche Verschiebung der Drehmomente in den negativen Bereich:

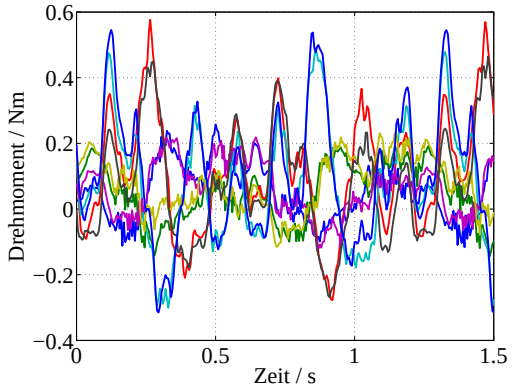


Bild 9 Drehmomentenverläufe innerhalb eines Einzelspiels

Dieser Sachverhalt trägt maßgeblich zur Reduzierung der Spitzenleistung bezüglich der motorgetriebenen Winden bei und eröffnet den Einsatz kleiner dimensionierter und damit kostengünstigerer Antriebssysteme. Weiter kann ein nahezu symmetrischer Verlauf des Leistungsniveaus der motorgetriebenen Winden belegt werden. Das symmetrische Leistungsniveau resultiert unter dem Einsatz von vorgespannten Federn aus einer energetisch günstigeren Verteilung der Antriebsmomente.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Dieser Beitrag beschreibt eine Methode zur Generierung von Energie-optimale Trajektorien unter dem Einsatz von vorgespannten Torsionsfedern. Auf Basis der mechanischen Energie der motorgetriebenen Winden als Optimierungskriterium findet die Optimierung zur Anpassung der zugrundeliegenden Parameter statt. Hierbei erfolgt die Optimierung der Federparameter und die zeitliche, sowie geometrische Anpassung der gewählten Bahnkurve in insgesamt drei Teilschritten. Die experimentellen Ergebnisse anhand des 6-DOF SEGESTA-Prototypen zeigen deutlich, welche unter Verwendung der augmentedPD-Reglung erfolgten, eine Reduzierung des Energiebedarfs hinsichtlich des Antriebssystems. Auf entscheidende Weise belegen diese Ergebnisse, dass die vorgespannten Federn, bei einer zeitlichen und geometrischen Anpassung der Bahnkurve, erst deren volles Potential ausschöpfen können. Darüber hinaus zeigen die durchgeführten Simulationen, dass nach einer mehrmaligen Ausführung des eingesetzten Optimierungsverfahrens auf Basis der in dieser Arbeit beschriebenen Auslegungsstrategie der Gesamtenergiebedarf sowie die Zykluszeit zur Ausführung der Bewegungsaufgabe weiter reduziert werden können.

In einer zukünftigen Arbeit soll die hier beschriebene Methode auf beliebige Start- und Endpunkte erweitert werden. Hierbei erfolgt bei festgesetzten Federparametern eine Anpassung der zeitlichen und geometrischen Parametern der zugrundeliegenden Bahnkurven auf Basis der beschriebenen Auslegungsstrategie.

8 Danksagung

Die zu diesen Ergebnissen führende Forschungsarbeit wurde durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung innerhalb des Rahmenprogramms “EffizienzCluster LogistikRuhr“, Unterprojekt “Stewart-Gough-Plattform“ unterstützt.

9 Literatur

[1] Fehlberg, L.; Reichert, C.; Bruckmann, T.; von Zitzewitz, J.: *Ausnutzung energiespeichernder Elemente zur Effizienzsteigerung seilbasierter Regalbediengeräte*. In: Tagung VDI Mechatronik 2013, Aachen, Deutschland, 2013.

[2] Zitzewitz, J. von, Fehlberg, L., Bruckmann, T., Vallery, H.: *Use of passively guided deflection units and energy-storing elements to increase the application range of wire robots.*. In: Cable-Driven Parallel Robots, Stuttgart, Germany, 2013.

[3] Lalo, W., Bruckmann, T., Schramm, D.: *Optimal Control for a Wire-Based Storage Retrieval Machine*. In: 4th European Conference on Mechanism Science, EUCOMES, Santander, Spanien, 2013.

[4] Bruckmann, T.; Mikelsons, L.; Hiller, M.: *A Design-To-Task Approach for Wire Robots*. In: Conference on Interdisciplinary Applications of Kinematics, IAK, Lima, Peru, 2008.

[5] Reichert, C.; Müller, K.; Bruckmann, T. *Robust Internal Force-Based Impedance Control for Cable-Driven Parallel Robots*. In: Cable-Driven Parallel Robots, Duisburg, Germany, 2014.

[6] Goldfarb, D.; Idnani, A. *A numerically stable dual method for solving strictly convex quadratic programs*. In: Mathematical Programming 27, 1983.

[7] Oh, S.-R.; Agrawal, S. K. *Cable Suspended Planar Robots with Redundant Cables*. In: IEEE Transactions on Robotics, vol. 21, no. 3, 2005.

[8] Ebbesen, S.; Kiwitz, P.; Guzzella, L. *A Generic Particle Swarm Optimization Matlab Function*. In: American Control Conference, Montreal, Canada, 2012.

[9] De Luca, A.; Mattone, R. *Actuator failure detection and isolation using generalized momenta*. In: IEEE Conference on Robotics and Automation, ICRA, Taipe, Taiwan, 2003.

[10] Reichert, C.; Glogowski, P.; Bruckmann, T. *Dynamische Rekonfiguration eines seilbasierten Manipulators zur Verbesserung der mechanischen Steifigkeit*. In: Tagung VDI Mechatronik 2015, Dortmund, Germany, 2015.

Analyse und Verbesserung der Echtzeitfähigkeit des Husty-Pfurner inverse Kinematik Algorithmus für allgemeine 6R Manipulatoren

Analysis and Improvement of Real Time Capability for Husty-Pfurner Inverse Kinematics Algorithm for General 6R Manipulators

Angerer Arthur, UMIT, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, 6060 Hall in Tirol, Österreich,
arthur.angerer@umit.at
Michael Hofbaur, JOANNEUM RESEARCH, Klagenfurt am Wörthersee, Österreich,
michael.hofbaur@joanneum.at

Kurzfassung

Der Husty-Pfurner Algorithmus ist ein zuverlässiges und numerisch stabiles Verfahren zur Berechnung der vollständigen inversen Kinematik von 6R Manipulatoren mit beliebiger Struktur. Um den Anforderungen moderner und intelligenter Produktionsprozesse zu genügen reicht es jedoch nicht, allein die inverse Kinematik Berechnung für beliebig aufgebaute 6R Roboter zu beherrschen. Um auf unvorhergesehene Ereignisse adäquat reagieren zu können, muss die Bahnplanung und damit die Berechnung der inversen Kinematik in Echtzeit durchführbar sein. In der vorliegenden Arbeit wurde der Husty-Pfurner Algorithmus hinsichtlich Echtzeitfähigkeit untersucht und es wird ein Ansatz zur Reduzierung der Rechenzeit vorgestellt. Der adaptierte Husty-Pfurner Algorithmus wurde in `C++` implementiert, bezüglich Zuverlässigkeit analysiert und anschließend auf einer industriellen Steuerung implementiert. Damit ist erstmals der Einsatz des Husty-Pfurner Algorithmus für Echtzeitanwendungen in begrenztem Maß möglich.

Abstract

The algorithm of Husty and Pfurner is a reliable and numerically stable method for the computation of the complete inverse kinematics solution of general structured 6R manipulators. In modern and intelligent production processes it is not sufficient to be aware of the computation of the inverse kinematics for arbitrarily structured manipulators. To be able to react appropriately on unforeseen events, the path planning process und thus the inverse kinematics calculation have to be done in real time. In this work the algorithm of Husty and Pfurner is analyzed with respect to real time capability and an approach leading to a reduction of computation time is presented. The approach was implemented in `C++` and an investigation concerning reliability and computation time was performed. The accelerated algorithm also was implemented on an industrial robot controller. Therefore, it is possible to deploy Husty and Pfurners algorithm in restricted real time applications for the first time.

1 Einleitung

Seit vielen Jahren sind Algorithmen zur Berechnung der vollständigen Lösung der inversen Kinematik (IK) für allgemeine serielle Roboter mit sechs rotatorischen Gelenken (6R Manipulatoren) bekannt [8, 9]. Seither fand ein laufender Verbesserungsprozess dieser Algorithmen hinsichtlich Berechnungszeit und numerischer Stabilität statt. Damit sind heute die Voraussetzungen gegeben, um auch für Robotergeometrien, welche von der Standardstruktur eines anthropomorphen Arms mit Handgelenk abweichen, die gewünschte Endeffektorbahn an einem gewöhnlichen Standard Computer, ohne Zuhilfenahme des Roboters, planen zu können. Dabei kann zum Abfahren der gewünschten Bahn eine von bis zu 16 Körperhaltungen ausgewählt werden, da für die IK eines allgemeinen seriellen Roboters mit sechs Freiheitsgraden bis zu 16 verschiedene reelle Lösungen existieren.

Gründe zur Realisierung von Robotergeometrien, welche von der Standardstruktur abweichen, sind z. B. konstruktive Vorgaben, die sich durch die Raumverhältnisse am Einsatzort ergeben oder Anforderungen an die mechanische Belastbarkeit [4]. Auch die Anpassung der Roboterstruktur an eine aktuell gestellte Handhabungsaufgabe kann zu speziellen Robotergeometrien führen. Dieser Ansatz lässt sich auf das Konzept der modularen seriellen Roboter ausweiten, bei welchem aus einem Baukastensystem, bestehend aus Aktuatormodulen und Zwischenelementen, ein serieller Manipulator mit nahezu beliebiger Struktur aufgebaut werden kann.

Die Ansprüche moderner, intelligenter Produktionsprozesse gehen jedoch über eine im Vorhinein durchgeführte Planung der gewünschten Endeffektorbahn eines allgemeinen seriellen Roboters hinaus. Um auf ungeplante, unvorhergesehene Ereignisse adäquat reagieren zu können ist es erforderlich, die Bahnplanung samt IK Berechnung in Echtzeit auf einer Robotersteuerung realisieren zu können. Damit ergeben sich für die eingesetzten IK Berechnungsverfahren zusätzliche Anforderungen hinsichtlich Rechenzeit und Numerik.

Aufgrund der Komplexität der durchzuführenden Berechnungen ist die Ermittlung der IK für allgemeine serielle Roboter in Echtzeit immer noch eine nichttriviale Aufga-

be. Durch die ständige Verbesserung der dafür verfügbaren Algorithmen hinsichtlich Rechenzeit und numerischer Eigenschaften einerseits und die Steigerung der auf industriellen Steuerungen verfügbaren Rechenleistung andererseits, wird der Einsatz derartiger Algorithmen in Echtzeitsystemen jedoch immer realistischer. In der vorliegenden Arbeit wird ein Algorithmus zur Berechnung der IK für allgemeine 6R Manipulatoren (Husty-Pfurner Algorithmus) hinsichtlich seiner praktischen Eignung für derartige Berechnungen analysiert. Es wird schließlich ein Ansatz zur Verringerung der Rechenzeit vorgestellt, welcher auf einer industriellen Steuerung implementiert wurde.

2 Husty-Pfurner Algorithmus

Beim Husty-Pfurner Algorithmus handelt es sich um ein IK Berechnungsverfahren für allgemeine serielle 6R Manipulatoren. Bei diesem Verfahren werden geometrische Überlegungen in die Berechnung der IK miteinbezogen und das Problem in einem hochdimensionalen Raum betrachtet, wodurch sich eine Vereinfachung der das System beschreibenden Gleichungen ergibt. Im folgenden Abschnitt soll eine kurze Beschreibung dieses Algorithmus gegeben werden, Details sind in [1] zu finden.

Zu Beginn wird der zur Berechnung herangezogene 6R Manipulator gedanklich in zwei Teile zerlegt. Dabei erfolgt die Teilung zwischen von der Roboterbasis aus gesehen dritter und vierter Gelenksachse und man erhält damit zwei 3R Manipulatoren, wobei ersterer dieselbe Roboterbasis wie der ursprüngliche Mechanismus besitzt und die Gelenksachsen $1,2$ und 3 beinhaltet. Der zweite 3R Manipulator besitzt die gewünschte Lage des Endeffektors als Basis und beinhaltet die Gelenksachsen $6,5$ und 4 des ursprünglichen Robotersystems. Das Problem der inversen Kinematik besteht nun darin, für die fiktiven Endeffektoren beider 3R Manipulatoren Stellungen im Raum zu finden, welche in Position und Orientierung übereinstimmen. Die Lösung dieses vereinfachten Problems erfolgt mittels einer kinematischen Abbildung, welche durch Berechnung der Study Parameter $u_0,u_1,u_2,u_3,v_0,v_1,v_2,v_3$ erfolgt. Damit wird jede mögliche euklidische Transformation des dreidimensionalen Raumes auf einen Punkt im siebendimensionalen kinematischen Bildraum P^7 abgebildet. Alle möglichen euklidischen Transformationen liegen somit auf einer speziellen Quadrik in P^7, welche als Study-Quadrik bekannt ist und durch (1) beschrieben wird.

$$u_0^2v_0^2+u_1^2v_1^2+u_2^2v_2^2+u_3^2v_3^2=0 \qquad (1)$$

Jeder Manipulator erzeugt, abhängig von seiner Geometrie, eine Menge von Punkten im kinematischen Bildraum, wobei jeder Punkt das Bild einer erreichbaren Endeffektorlage ist. Diese Menge an Punkten im kinematischen Bildraum wird Zwangsmannigfaltigkeit genannt und ist die kinematische Abbildung des Arbeitsraumes des betreffenden Manipulators. Für jeden der beiden 3R Mechanismen erhält man eine derartige Zwangsmannigfaltigkeit, welche durch den Schnitt von vier sechsdimensionalen linearen Unterräumen, welche von einem gemeinsamen Parameter w abhängen, mit der Study-Quadrik, ermittelt werden kann. Die Struktur dieser Unterräume ist aus (2) ersichtlich.

$$H_j=\sum_{i=0}^{3}(a_{ij}+b_{ij}w)u_i+\sum_{i=0}^{3}(c_{ij}+d_{ij}w)v_i=0 \qquad (2)$$

Dabei gilt $j=1\ldots4$, bei a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} und d_{ij} handelt es sich um reelle Zahlen, welche von der Robotergeometrie bzw. der Endeffektorlage des 6R Roboters abhängen, w steht mit einem der drei Gelenkswinkel eines 3R Teil-Manipulators in Zusammenhang und die Study Parameter $u_0,\ldots,u_3$ und $v_0,\ldots,v_3$ entsprechen der Endeffektorlage des betreffenden 3R Manipulators.

Die Lösung der inversen Kinematik des ursprünglichen 6R Manipulators, welche der Suche nach Gelenkswinkeln für sich deckende Endeffektorlagen beider 3R-Manipulatoren gleichkommt, erhält man durch Schnitt der Zwangsmannigfaltigkeiten im kinematischen Bildraum und anschließende inverse kinematische Abbildung.

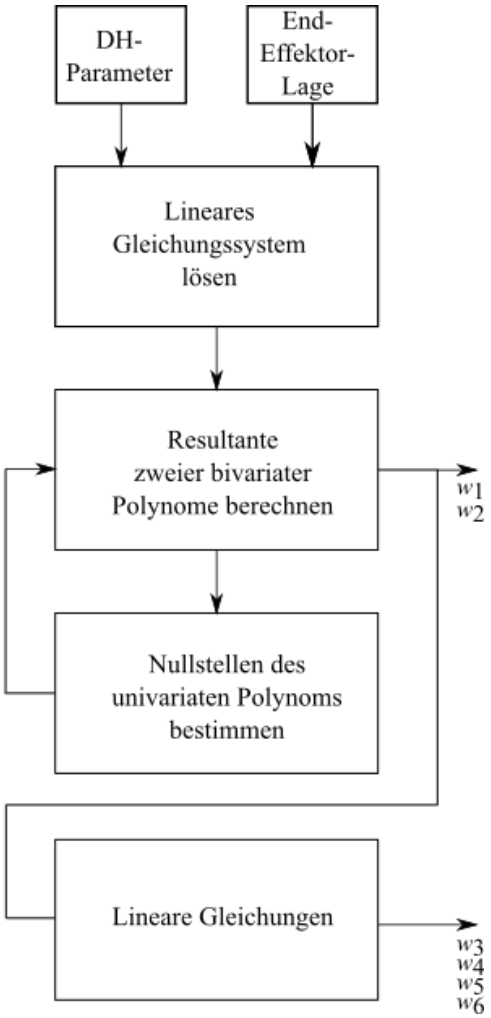


Bild 1 Struktur Berechnungsablauf Husty-Pfurner Algorithmus

Der Husty-Pfurner Algorithmus führt somit auf ein zu lösendes Gleichungssystem, bestehend aus neun Gleichungen mit neun Unbekannten, wobei eine Gleichung die Study Quadrik (1) beschreibt. Die restlichen acht Gleichungen, deren Struktur in (2) angegeben ist und die von je einem unbekannten Gelenkswinkel des ersten 3R Teilmanipulators w_1 bzw. des zweiten 3R Teilmanipula-

tors w_2 abhängen, sowie linear in den Study Parametern $u_0, u_1, u_2, u_3, v_0, v_1, v_2, v_3$ sind, charakterisieren die beiden sechsdimensionalen Unterräume. Die übliche Vorgangsweise zur Lösung dieses nichtlinearen Gleichungssystems ist in **Bild 1** schematisch dargestellt.
Dabei werden sieben Gleichungen, welche die linearen Unterräume beschreiben, ausgewählt und eine Normierung der Study-Parameter durchgeführt. Danach wird dieses, in den Study-Parametern lineare Gleichungssystem, gelöst. Anschließend wird die Lösung, welche von w_1 und w_2 abhängt, in die verbliebene lineare Gleichung und in die Gleichung der Study Quadrik eingesetzt. Damit erhält man zwei bivariate Gleichungen und die Bildung der Resultante führt auf ein univariates Polynom in w_1, dessen Nullstellen mit einem numerischen Standardverfahren bestimmt werden können. Sechzehn der erhaltenen 56 Nullstellen entsprechen den bei der Lösung der inversen Kinematik gesuchten Gelenkswinkeln für w_1. Rückeinsetzen liefert die Lösung für die zugehörigen Gelenkswinkel w_2 und durch Lösung von linearen Gleichungen erhält man die vollständige Lösung der inversen Kinematik.

3 Analyse des Husty-Pfurner Algorithmus

Der Algorithmus von Husty und Pfurner wurde in `C++` implementiert. Hierbei erfolgt die Lösung des linearen Gleichungssystems, bestehend aus sieben Gleichungen mit sieben Unbekannten, mittels Cramer'scher Regel. Zur Bestimmung der Nullstellen des resultierenden univariaten Polynoms der Ordnung 56 wurde der Jenkins-Traub Algorithmus verwendet. Die praktische Einsatzfähigkeit dieser `C++` Implementierung des Husty-Pfurner Algorithmus wurde im Detail in [5] analysiert. Da die vorliegende Arbeit auf diesen Ergebnissen aufbaut, sollen im folgenden Absatz die Resultate dieser Untersuchungen kurz erläutert werden.
In [5] wurde eine Analyse des Husty-Pfurner Algorithmus hinsichtlich Rechenzeit, Zuverlässigkeit und numerische Genauigkeit durchgeführt und anhand von vier von der Standardstruktur abweichenden Robotern mit dem IK Berechnungsverfahren von Liu und Zhu [3] verglichen. Dieser Liu-Zhu Algorithmus basiert auf dem bekannten Algorithmus von Raghavan und Roth [2], wobei jedoch Verbesserungen hinsichtlich Numerik und Rechenzeit durchgeführt wurden. So wurde etwa das Problem der Berechnung der Nullstellen einer Determinante einer Matrix mit univariaten Polynomen als Einträgen auf die numerische Berechnung der Eigenwerte einer Matrix zurückgeführt. Weiters wird die Berechnung von ineffektiven Nullstellen, das sind Nullstellen die bestimmt werden müssen, allerdings keine Lösung der inversen Kinematik darstellen, vermieden. Der Vergleich des Husty-Pfurner Algorithmus mit dem Liu-Zhu Algorithmus, die beide in `C++` implementiert wurden, zeigte, dass der Liu-Zhu Algorithmus für zwei analysierte Roboter Zuverlässigkeiten von etwa 100% erreicht und auf einem Standard PC mit *AMD Phenom* Prozessor, 3.2 GHz und 4 GB RAM durchschnittliche Rechenzeiten von 1,2 ms - 2,4 ms besitzt. Allerdings führen zwei weitere untersuchte Robotergeometrien mit allgemeiner Struktur zum vollständigen Versagen des Algorithmus, da bestimmte Matrizen, die im Berechnungsverlauf invertiert werden müssen, für diese Roboterstrukturen singulär sind. Der Husty-Pfurner Algorithmus dagegen besitzt eine ermittelte Zuverlässigkeit von 96% - 100% für alle betrachteten Roboter, aufgrund der erzielten Rechenzeit von durchschnittlich 9 ms auf dem zuvor genannten Standard PC ist er für den Einsatz in Echtzeitanwendungen jedoch in dieser Form noch nicht geeignet.

4 Maßnahmen zur Verringerung der Rechenzeit

Die Berechnung der IK nach Husty und Pfurner resultiert in der Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems, bestehend aus 9 Gleichungen mit 9 Unbekannten, wobei der Algorithmus in die drei Hauptberechnungsschritte 1) Lösung des linearen Gleichungssystem, 2) Resultantenberechnung zweier bivariater Polynome und 3) Nullstellenberechnung eines univariaten Polynoms der Ordnung 56 eingeteilt werden kann. Die Analyse des Husty-Pfurner Algorithmus ergab, dass durchschnittlich etwa 23% der Rechenzeit für Berechnungsschritt 2) und ca. 6% für Berechnungsschritt 3) erforderlich sind, während etwa 65% der Rechenzeit zur Lösung des linearen Gleichungssystems in Berechnungsschritt 1) benötigt werden. Aus diesem Grund ist es naheliegend Berechnungsschritt 1) und dessen Umsetzung näher zu betrachten, um eine Reduzierung der Rechenzeit des Husty-Pfurner Algorithmus zu erreichen. Dieser Berechnungsschritt beinhaltet die Lösung eines linearen Gleichungssystems bestehend aus sieben Gleichungen nach 8 homogenen Unbekannten, wobei das Berechnungsergebnis von den zwei symbolischen Variablen w_1 und w_2 abhängt. Da eine direkte allgemeine Lösung des Gleichungssystems aufgrund der Komplexität nicht möglich ist, muss das Gleichungssystem für jede vorgegebene Lage des Roboter-Endeffektors von neuem gelöst werden.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,2}+b_{1,2}w_1 & a_{1,3}+b_{1,3}w_1 & \dots & a_{1,8}+b_{1,8}w_1 \\ a_{2,2}+b_{2,2}w_1 & a_{2,3}+b_{2,3}w_1 & \dots & a_{2,8}+b_{2,8}w_1 \\ a_{3,2}+b_{3,2}w_1 & a_{3,3}+b_{3,3}w_1 & \dots & a_{3,8}+b_{3,8}w_1 \\ a_{4,2}+b_{4,2}w_1 & a_{4,3}+b_{4,3}w_1 & \dots & a_{4,8}+b_{4,8}w_1 \\ a_{5,2}+b_{5,2}w_2 & a_{5,3}+b_{5,3}w_2 & \dots & a_{5,8}+b_{5,8}w_2 \\ a_{6,2}+b_{6,2}w_2 & a_{6,3}+b_{6,3}w_2 & \dots & a_{6,8}+b_{6,8}w_2 \\ a_{7,2}+b_{7,2}w_2 & a_{7,3}+b_{7,3}w_2 & \dots & a_{7,8}+b_{7,8}w_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = -\begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1}w_1 \\ a_{2,1}+b_{2,1}w_1 \\ a_{3,1}+b_{3,1}w_1 \\ a_{4,1}+b_{4,1}w_1 \\ a_{5,1}+b_{5,1}w_2 \\ a_{6,1}+b_{6,1}w_2 \\ a_{7,1}+b_{7,1}w_2 \end{pmatrix}; \mathbf{x} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}; u_0 = x_0 = 1 \tag{3}$$

Sind die gewünschte Endeffektorlage und die Struktur des Roboters vorgegeben, und setzt man $u_0 = 1$, so erhält man ein lineares Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, dessen Struktur in

(3) angegeben ist.
Dieses Gleichungssystem muss nach den restlichen Study-Parametern $\mathbf{x}$ gelöst werden, wobei es sich bei den Einträgen der erweiterten Koeffizientenmatrix $\mathbf{Ab}$ um bivariate Polynome handelt. Verwendet man zur Lösung dieses linearen Gleichungssystems die Cramer'sche Regel und führt die Normierung $u_0 = x_0 = \det(\mathbf{A})$ durch, so erhält man die Lösung des linearen Gleichungssystems wie in (4) angegeben. Damit ist die Berechnung von 8 Determinanten von 7×7 Matrizen, welche aus der erweiterten Koeffizientenmatrix gebildet werden, erforderlich.

$$\begin{aligned} x_0 &= u_0 = \det(\mathbf{A}) \\ x_k &= \det(\hat{\mathbf{A}}_k);\ k = 1 \dots 7 \\ \hat{\mathbf{A}}_k &= \left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_7\right); \end{aligned} \tag{4}$$

Dabei ist $\mathbf{a}_k$ der k-te Spaltenvektor der Matrix $\mathbf{A}$ und x_k; $k = 1 \dots 7$ das k-te Element des Lösungsvektors $\mathbf{x}$. Der Grund für die hohe Rechenzeit, welche in der Analyse des Husty-Pfurner Algorithmus für diesen Berechnungsschritt ermittelt wurde, liegt darin, dass kaum effiziente Algorithmen zur Determinantenberechnung von Matrizen mit symbolischen Einträgen bekannt sind. Zur Berechnung von Determinanten für Matrizen mit numerischen Einträgen hingegen gibt es eine Vielzahl von schnellen und effizienten Algorithmen. In [7] wird eine Möglichkeit aufgezeigt, wie das Problem der Determinantenberechnung von Matrizen, deren Elemente aus multivariaten Polynomen bestehen, auf rein numerische Berechnungen übergeführt werden kann. Dabei wird in einem ersten Schritt durch Anwendung des Kronecker Substitutions-Tricks die Berechnung der Determinante einer multivariaten Matrix auf die Determinantenberechnung einer univariaten Matrix zurückgeführt.
Anschließend erfolgt eine wiederholte numerische Determinantenberechnung der resultierenden univariaten Matrix, wobei verschiedene numerische Werte für die verbleibende symbolische Variable w_1 eingesetzt werden. Durch Polynominterpolation können die Polynomkoeffizienten der Determinante der univariaten Matrix anschließend bestimmt werden und durch Rücksubstitution erhält man schließlich die gesuchte Determinante der bivariaten Matrix, welche der Lösung für eine Variable des ursprünglichen Gleichungssystems entspricht.
Generell kann durch Anwendung des Kronecker Substitutions-Tricks das Problem der Multiplikation von multivariaten Polynomen auf ein i. Allg. rechnentechnisch effizienteres univariates Multiplikationsproblem zurückgeführt werden. Sind zwei multivariate Polynome gegeben, sind Substitutionen durchzuführen, wie sie in (5) angeführt sind.

$$v_i = v_{i+1}^{d_{i+1}+1} = v_n^{p_i};\ i = 1 \dots n-1; \tag{5}$$

Dabei gibt d_i den höchsten in beiden Polynomen vorkommenden Grad der Variable v_i an und n beschreibt die Anzahl der Variablen. Durch diese Substitution erhält man univariate Polynome in v_n, welche mit einem geeigneten rechnerisch effizienten Verfahren multipliziert werden können. Der Kronecker Substitutions-Trick wurde im Zuge der Lösung des linearen Gleichungssystems mittels Cramer'scher Regel im Berechnungsverlauf des Husty-Pfurner Algorithmus angewendet. Wie beschrieben sind dabei die Determinanten von acht bivariaten 7×7 Matrizen zu berechnen. Die Struktur der Determinanten ist in (6) angegeben und es gilt $k = 0 \dots 7$.

$$\begin{aligned} x_k = {} & c_{0k} + c_{1k}w_1 + c_{2k}w_1^2 + c_{3k}w_1^3 + c_{4k}w_1^4 + \\ & + c_{5k}w_2 + c_{6k}w_1w_2 + c_{7k}w_1^2w_2 + c_{8k}w_1^3w_2 + \\ & + c_{9k}w_1^4w_2 + c_{10k}w_2^2 + c_{11k}w_1w_2^2 + c_{12k}w_1^2w_2^2 + \\ & + c_{13k}w_1^3w_2^2 + c_{14k}w_1^4w_2^2 + c_{15k}w_2^3 + c_{16k}w_1w_2^3 + \\ & + c_{17k}w_1^2w_2^3 + c_{18k}w_1^3w_2^3 + c_{19k}w_1^4w_2^3 \end{aligned} \tag{6}$$

Die Anzahl der Variablen n beträgt 2 und setzt man $v_1 = w_2$; $v_2 = w_1$, so ergibt sich für die Kronecker Substitution (7):

$$d_1 = 3;\ d_2 = 4;\ v_1 = v_2^{d_2+1};\ w_2 = w_1^{d_2+1} = w_1^5 \tag{7}$$

Die Struktur des neuen zu lösenden univariaten Gleichungssystems $\tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}$ ist in (8) angegeben.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a_{1,2}+b_{1,2}w_1 & a_{1,3}+b_{1,3}w_1 & \dots & a_{1,8}+b_{1,8}w_1 \\ a_{2,2}+b_{2,2}w_1 & a_{2,3}+b_{2,3}w_1 & \dots & a_{2,8}+b_{2,8}w_1 \\ a_{3,2}+b_{3,2}w_1 & a_{3,3}+b_{3,3}w_1 & \dots & a_{3,8}+b_{3,8}w_1 \\ a_{4,2}+b_{4,2}w_1 & a_{4,3}+b_{4,3}w_1 & \dots & a_{4,8}+b_{4,8}w_1 \\ a_{5,2}+b_{5,2}w_1^5 & a_{5,3}+b_{5,3}w_1^5 & \dots & a_{5,8}+b_{5,8}w_1^5 \\ a_{6,2}+b_{6,2}w_1^5 & a_{6,3}+b_{6,3}w_1^5 & \dots & a_{6,8}+b_{6,8}w_1^5 \\ a_{7,2}+b_{7,2}w_1^5 & a_{7,3}+b_{7,3}w_1^5 & \dots & a_{7,8}+b_{7,8}w_1^5 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = -\begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1}w_1 \\ a_{2,1}+b_{2,1}w_1 \\ a_{3,1}+b_{3,1}w_1 \\ a_{4,1}+b_{4,1}w_1 \\ a_{5,1}+b_{5,1}w_1^5 \\ a_{6,1}+b_{6,1}w_1^5 \\ a_{7,1}+b_{7,1}w_1^5 \end{pmatrix};\ \tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix};\ u_0 = \tilde{x}_0 = \det(\tilde{\mathbf{A}}) \tag{8}$$

Mittels Cramer'scher Regel wird nun dieses Gleichungssystem im Zuge der IK Berechnung nach Husty und Pfurner gelöst. Um symbolische Berechnungen zu vermeiden werden zur Bestimmung von jedem der acht Study-Parameter verschiedene numerische Werte für die verbliebene symbolische Variable eingesetzt und die Determinanten der daraus erhaltenen 7×7 Matrizen mit rein numerischen Einträgen ermittelt. Polynominterpolation liefert anschließend die Koeffizienten der Determinantenpolynome. Der maximale Grad D der resultierenden univariaten Polynome kann mittels (9) bestimmt werden, wobei d_i den maximalen Grad der Variable v_i in der multivariaten Determinante beschreibt und n die Anzahl der Variablen ist.

$$\begin{aligned} D &= \sum_{i=1}^{n} \left(d_i \prod_{k=i+1}^{n} (d_k + 1) \right) \\ &= d_1 * (d_2 + 1) + d_2 = 3 * (4 + 1) + 4 = 19 \end{aligned} \tag{9}$$

Aus (9) geht hervor, dass zur Bestimmung jeder univariaten Determinante auf numerischem Weg maximal 20 Stützstellen berechnet werden müssen und somit maximal 20 verschiedene Werte von w_1 erforderlich sind. In (10) ist die Struktur des Polynoms der resultierenden univariaten De-

terminante für $k = 0 \dots 7$ dargestellt.
Da 20 Stützstellen notwendig sind, um die Koeffizienten $\tilde{c}_{0k} \dots \tilde{c}_{19k}$ ermitteln zu können und zur Bestimmung der Lösungen des linearen Gleichungssystems die gesamte Prozedur 8 Mal ausgeführt werden muss, sind insgesamt 160 Koeffizienten zu ermitteln.

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k = {} & \tilde{c}_{0k} + \tilde{c}_{1k} w_1 + \tilde{c}_{2k} w_1^2 + \tilde{c}_{3k} w_1^3 + \tilde{c}_{4k} w_1^4 + \\ & + \tilde{c}_{5k} w_1^5 + \tilde{c}_{6k} w_1^6 + \tilde{c}_{7k} w_1^7 + \tilde{c}_{8k} w_1^8 + \tilde{c}_{9k} w_1^9 + \\ & + \tilde{c}_{10k} w_1^{10} + \tilde{c}_{11k} w_1^{11} + \tilde{c}_{12k} w_1^{12} + \tilde{c}_{13k} w_1^{13} + \\ & + \tilde{c}_{14k} w_1^{14} + \tilde{c}_{15k} w_1^{15} + \tilde{c}_{16k} w_1^{16} + \tilde{c}_{17k} w_1^{17} + \\ & + \tilde{c}_{18k} w_1^{18} + \tilde{c}_{19k} w_1^{19} \\ & k = 0 \dots 7 \end{aligned} \tag{10}$$

Nach Bestimmung der univariaten Polynome $\tilde{x}_0 \dots \tilde{x}_7$ muss die Kronecker Substitution rückgängig gemacht werden, um die multivariaten Polynome zu erhalten, welche der Lösung $x_0 \dots x_7$ des linearen Systems entsprechen. Um die ursprünglich gesuchten bivariaten Polynome zu erhalten sind bei den univariaten Polynomen $\tilde{x}_k$ die Koeffizienten $\tilde{c}_{0k} \dots \tilde{c}_{4k}$ durch w_1^0 zu dividieren und mit w_2^0 zu multiplizieren, die Koeffizienten $\tilde{c}_{5k} \dots \tilde{c}_{9k}$ durch w_1^5 zu dividieren und mit w_2^1 zu multiplizieren, die Koeffizienten $\tilde{c}_{10k} \dots \tilde{c}_{14k}$ durch w_1^{10} zu dividieren und mit w_2^2 zu multiplizieren und die Koeffizienten $\tilde{c}_{15k} \dots \tilde{c}_{19k}$ durch w_1^{15} zu dividieren und mit w_2^3 zu multiplizieren. Als Resultat erhält man für $k = 0 \dots 7$ je ein gesuchtes bivariate Polynom, welches der Lösung des linearen Gleichungssystems nach einem der Study-Parameter entspricht.

5 Exemplarischer Roboter

Die Berechnung der inversen Kinematik mittels Husty-Pfurner Algorithmus wurde sowohl in ihrer ursprünglichen als auch in ihrer adaptierten Form an einem speziell aufgebauten Manipulator, dem sog. CuMa (Curved Manipulator) Arm untersucht, welcher in **Bild 2** zu sehen ist.

Tabelle 1 DH-Parameter CuMa Arm

i	d_i / mm	a_i / mm	α_i / °
1	168,47	194,92	-105,67
2	43,10	168,56	-103,62
3	77.07	392,60	237,92
4	114,66	479,83	292,53
5	124,28	-282,52	66,31
6	0,00	191,40	0,00

Dabei handelt es sich um einen modular aufgebauten seriellen Manipulator mit sieben Freiheitsgraden, welcher sich durch gebogene Zwischenelemente auszeichnet und mit der am Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik der `UMIT` verfügbaren Ausstattung schnell und einfach aufgebaut werden kann. Er verfügt über eine sehr allgemeine Struktur, was sich dadurch zeigt, dass mit Ausnahme von sechster und siebter Drehachse keine sich schneidenden Achsen existieren. Wird die siebte Achse nicht bewegt, erhält man einen 6R Manipulator. Die DH-Parametern dieses Manipulators sind in **Tabelle 1** angegeben, dabei werden die Parameter a_i, α_i und d_i meist als „link length“, „link twist“ und „link offset“ bezeichnet. Eine detailliertere Beschreibung des Manipulators ist in [6] zu finden.
Der CuMa Arm weist darüber hinaus die Besonderheit auf, dass ein Bereich im Arbeitsraum existiert, in welchem die maximale Anzahl von 16 Lösungen der inversen Kinematik erreicht wird. Die modulare Struktur des CuMa Arms wird durch Schunk Power-Cube Elemente gebildet, welche durch gebogene, speziell angefertigte Zwischenelemente verbunden sind. Die Ansteuerung der Aktuatoren erfolgt mittels Profibus über einen *B&R* Automation-PC.

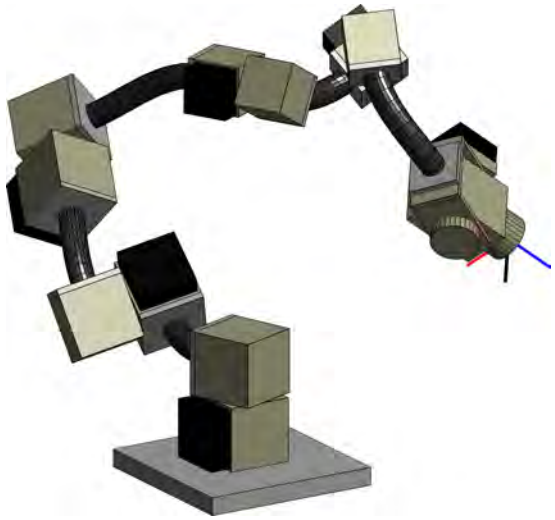


Bild 2 CuMa Arm

6 Ergebnisse

Der zuvor beschriebene Ansatz zur Verringerung der Berechnungszeit in Berechnungsschritt 1), indem das lineare Gleichungssystem mittels Cramer'scher Regel und Verfahren von Dingle gelöst wird, wurde in die `C++` Version des Husty-Pfurner Algorithmus integriert. Um Funktionalität, Zuverlässigkeit und Genauigkeit testen und Vergleiche mit der ursprünglichen Version durchführen zu können, wurden 5000 zufällig gewählte Endeffektorlagen gewählt und die Abweichungen der aus der inversen Kinematik Berechnung erhaltenen Gelenkswinkel w_1 bzw. w_2 von den Sollwinkeln berechnet. Wie bereits erwähnt, lassen sich die restlichen Gelenkswinkel danach ohne großen Rechenaufwand durch Lösung linearer Gleichungen bestimmen. Weichen die betracheten Gelenkswinkel mehr als 0.01 rad von ihrer Sollposition ab bzw. wird keine Lösung gefunden, wird die IK Berechnung als fehlerhaft angesehen. Zur Ermittlung der Determinanten der 7×7 Matrizen mit rein numerischen Einträgen wurde das Gauss'sche Eliminationsverfahren mit anschließender Multiplikation der Diagonaleinträge der resultierenden Dreiecksmatrix eingesetzt. Die darauf folgende Bestimmung der Polynomkoeffizienten wurde durch Lösung des resultierenden linearen Gleichungssystems durchgeführt, wobei der eingesetzte Algorithmus aufgrund der besseren numerischen Eigenschaften die Lagrange-Basis zur Darstellung der Polynome verwendet. Für die in [5] betrachteten Roboter zeigte sich im Vergleich zur symbolischen Determinantenberechnung

nur eine geringfügige Verschlechterung in der numerischen Genauigkeit bzw. Zuverlässigkeit des derart modifizierten Husty-Pfurner Algorithmus. In **Tabelle 2** sind die Prozentsätze für fehlerhafte Berechnungen der IK des zuvor beschriebenen CuMa Arms angegeben. Die Berechnungszeit für Berechnungsschritt 1 (Lösung lineares Gleichungssystem) konnte auf dem Standard Desktop PC durch die beschriebenen Maßnahmen von etwa 6 ms auf ca. 0,3 ms erheblich reduziert werden. Damit werden am Standard PC Rechenzeiten von lediglich 2,5 ms erreicht, wobei der Hauptanteil der Berechnungszeit mit ca. 2 ms nun bei der Resultantenberechnung liegt. Die bezüglich Rechenzeit verbesserte `C++` Implementierung des Husty-Pfurner Algorithmus wurde darüber hinaus auch auf eine echtzeitfähige Industriesteuerung von *B&R* übertragen (*APC910 Intel Core i7*, 2,3 GHz, Quad-Core). Aufgrund der Nichtverfügbarkeit von modernen `C++11` Konstrukten zur effizienten Speicherverwaltung steigen die Rechenzeiten auf der Steuerung allerdings auf etwa 6 ms an, wobei etwa 4 ms zur Resultantenberechnung benötigt werden. Die Ergebnisse für die erreichten Berechnungszeiten sind in **Tabelle 3** zusammengefasst. Dabei beschreibt PC_{orig} die ursprüngliche `C++` Implementierung am Standard PC, PC_{num} die adaptierte beschleunigte Version am Standard PC und APC_{num} die beschleunigte Husty-Pfurner Variante auf der *B&R* Industriesteuerung.

Tabelle 2 Fehlerhafte Berechnungen Husty-Pfurner Algorithmus in Prozent

	PC_{orig}	PC_{num}
Lineares System / %	0,01	0,2
Gesamt / %	0,2	0,4

Tabelle 3 Berechnungszeit Husty-Pfurner Algorithmus

	PC_{orig}	PC_{num}	APC_{num}
1) Lineares System / ms	6,0	0,3	0,8
2) Resultante / ms	2,0	2,0	4,0
Gesamt / ms	8,1	2,5	6,0

7 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde ein Ansatz zur Verringerung der Rechenzeit des IK Algorithmus von Husty und Pfurner vorgestellt. Auf Basis von Untersuchungen des Algorithmus die zeigten, dass etwa 60% der Rechenzeit zur Lösung eines linearen Gleichungssystems mit zwei symbolischen Variablen benötigt wird, wurde eine Reduktion der Rechenzeit in diesem Berechnungsschritt angestrebt. Vor allem die zur Lösung des Gleichungssystems durchgeführten Berechnungen der Determinanten von Matrizen mit bivariaten Polynomen als Einträgen zeichnen sich durch lange Berechnungszeiten aus. Durch Durchführung des Kronecker Substitutions Tricks und numerische Bestimmung der Koeffizienten der Lösungspolynome konnten symbolische Determinantenberechnungen bei der Lösung des linearen Gleichungssystems vermieden werden. Bei geringfügiger Verschlechterung der Zuverlässigkeit des Algorithmus konnte auf diesem Weg die durchschnittliche Rechenzeit von etwa 8 ms auf ca. 2,5 ms auf einem Standard Desktop-PC gesenkt werden. Damit steht erstmals eine Variante des Husty-Pfurner Algorithmus zur Verfügung, welche in eingeschränktem Maß für Echtzeitanwendungen einsetzbar ist. Auf der *B&R* Industriesteuerung konnte wegen der Nichtverfügbarkeit von modernen `C++11` Konstrukten zur effizienten Speicherverwaltung die Rechenzeit bisher nur auf ca. 6 ms gesenkt werden. Durch eine weitere Verbesserung der Effizienz des Algorithmus ist hier jedoch noch eine deutliche zusätzliche Verminderung zu erwarten. Neben Optimierungen im Programmcode erscheint vor allem bei der Resultantenberechnung noch eine Reduzierung der Rechenzeit möglich, etwa dadurch, dass auch in diesem Schritt symbolische Berechnungen vermieden werden. Mit dieser rechenzeitoptimierten Version steht mit dem Husty-Pfurner Algorithmus nicht nur ein zuverlässiges, sondern auch ein echtzeitfähiges IK Berechnungsverfahren zur Verfügung.

8 Literatur

[1] Husty, Manfred L.; Pfurner, Martin; Schroecker, Hans-Peter: *A new and efficient Algorithm for the Inverse Kinematics of a General Serial 6R Manipulator*. In: Mech. Mach. Theory. 2007. 42(1). S. 66-81.

[2] Raghavan, M.; Roth, B.: *Inverse Kinematics of the General 6R Manipulator and Related Linkages*. In: Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design. 1993. Vol. 115. S.502-508.

[3] Liu, Songguo; Zhu, Shiqiang: *An Optimized Real Time Algorithm for the Inverse Kinematics of General 6R Robots*. In: IEEE International Conference on Control and Automation. 2007. S. 2080-2084.

[4] Kucuck, S.; Bingul, Z.: *The Inverse Kinematics Solutions of Fundamental Robot Manipulators with Offset Wrist*. In: IEEE International Conference on Mechatronics ICM '05. 2005.

[5] Angerer, A.; Hofbaur M.: *Industrial Versatility of Inverse Kinematics Algorithms for General 6R Manipulators*. In: 16th International Conference on Advanced Robotics (ICAR). 2013.

[6] Brandstötter, M.; Angerer, A.; Hofbaur, M.: *The Curved Manipulator (Cuma-Type Arm): Realization of a Serial Manipulator with General Structure in Modular Design*. In: 14th IFToMM World Congress 2015. submitted.

[7] Dingle B. M.: *Multivariate Determinants Through Univariate Interpolation*. In: Technical Report. Department of Computer Science Texas A&M University. 2005.

[8] Raghavan, M.; Roth, B.: *Kinematic analysis of the 6R manipulator of general geometry*. In: Proc. Fifth Int. Symposium on Robotics Research, MIT Press, Cambridge. 1990.

[9] Lee, H.Y.; Liang, C.G.: *Displacement analysis of the general 7-link 7R mechanism*. In: Mechanism and machine theory. 23(3) 1988. S. 209-217.

Geometrisch basierte Pseudoinverse und reziproke Schrauben der Jacobimatrix von 4H Mechanismen
Geometrically based pseudo-inverse and reciprocal screws of the Jacobian of 4H mechanisms

R. Bartkowiak, C. Woernle. Fakultät für Maschinenbau und Schiffstechnik, Universität Rostock, 18059 Rostock, {rene.bartkowiak, woernle}@uni-rostock.de

Kurzfassung

Überbestimmte einschleifige Mechanismen mit $n \leq 6$ Schraubgelenken (nH Mechanismen), siehe Abb. 1, sind global beweglich mit einem Freiheitsgrad von $f = 1$, wenn die Achsen der Schraubgelenke $\hat{\boldsymbol{a}}_i$ die Schleifenschließbedingung erster Ordnung

$$\boldsymbol{A}(s)\,\lambda(s) = \underline{\hat{\boldsymbol{a}}}_n \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{A} = \left[\underline{\hat{\boldsymbol{a}}}_1 \ldots \underline{\hat{\boldsymbol{a}}}_{n-1}\right], \quad \underline{\hat{\boldsymbol{a}}}_j = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_j \\ \widetilde{\boldsymbol{r}}_j \boldsymbol{a}_j + h_j \boldsymbol{a}_j \end{bmatrix}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \lambda_i = -\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}q_n}, \tag{1}$$

hier parametriert, ohne Einschränkung der Allgemeinheit, durch die relative Gelenkkoordinate $s = q_n$ des $n$ten Schraubgelenkes, in einer offenen Umgebung der aktuellen Lage $s_0 = q_{n0}$ erfüllen (mit der Notation $\widetilde{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$).

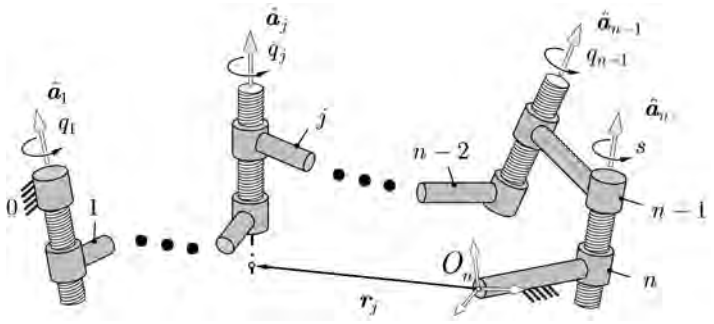


Bild 1 Mechanismus mit n Schraubgelenken

Da die Schleifenschließbedingungen eines nH Mechanismus analytische Funktionen sind, liefert die Taylorreihenentwicklung von (1) unendlich viele algebraische Bedingungen für die Beweglichkeit des Mechanismus, welche auch Schließbedingungen der Ordnung $m = 1, \ldots, \infty$ in der aktuellen Lage des Mechanismus genannt werden, $s_0 = q_{n0}$. Diese Schließbedingungen enthalten die Ableitungen der Schraubachsen, $\hat{\boldsymbol{a}}_i, \hat{\boldsymbol{a}}_i', \ldots$, sowie die Ableitungen der Verhältnisse der relativen Gelenkkoordinaten, $\lambda_i, \lambda_i', \ldots$ bezüglich der unabhängigen Koordinate s, ausgewertet in $s = s_0$. Die Elimination der relativen Gelenkkoordinaten mit Hilfe einer beliebig gewichteten Pseudoinversen $\boldsymbol{A}_0^+$ der Jacobimatrix $\boldsymbol{A}_0$ sowie der Schrauben $\underline{\hat{\boldsymbol{k}}}_{j0}, j = 1, \ldots, (6 - \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}_0))$ welche Basisschrauben des reziproken Schraubensystems zu den in $\boldsymbol{A}_0$ enthaltenen Spaltenschrauben sind, (Einheitsmatrix $\boldsymbol{E}$)

$$\underline{\hat{\boldsymbol{k}}}_{j0}^{\mathrm{T}} \Delta \boldsymbol{A}_0 \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{mit} \quad \Delta = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \quad j = 1, \ldots, (7-n), \tag{2}$$

liefert, wie in [2] gezeigt wurde, ein System von notwendigen Mobilitätsbedingungen

$$\left.\begin{array}{lll} m = 1: & 0 = \underline{\hat{\boldsymbol{k}}}_{j0}^{\mathrm{T}} \Delta \underline{\hat{\boldsymbol{a}}}_{n0} & \equiv g_1(\underline{\hat{\boldsymbol{a}}}_{n0}, \boldsymbol{A}_0) \\ m = 2: & 0 = \underline{\hat{\boldsymbol{k}}}_{j0}^{\mathrm{T}} \Delta \boldsymbol{A}_0' \boldsymbol{A}_0^+ \underline{\hat{\boldsymbol{a}}}_{n0} & \equiv g_2(\underline{\hat{\boldsymbol{a}}}_{n0}, \boldsymbol{A}_0) \\ m = 3: & 0 = \underline{\hat{\boldsymbol{k}}}_{j0}^{\mathrm{T}} \Delta \left(-2\boldsymbol{A}_0' \boldsymbol{A}_0^+ \boldsymbol{A}_0' + \boldsymbol{A}_0''\right) \boldsymbol{A}_0^+ \underline{\hat{\boldsymbol{a}}}_{n0} & \equiv g_3(\underline{\hat{\boldsymbol{a}}}_{n0}, \boldsymbol{A}_0) \\ & \vdots & \\ m: & 0 = \ldots & \equiv g_m(\underline{\hat{\boldsymbol{a}}}_{n0}, \boldsymbol{A}_0) \end{array}\right\} \quad \boldsymbol{g}_{(m)}(\underline{\hat{\boldsymbol{a}}}_{10}, \ldots, \underline{\hat{\boldsymbol{a}}}_{n0}) = \boldsymbol{0}. \tag{3}$$

Die Ableitungen der Jacobimatrix $\boldsymbol{A}_0 = \left[\begin{array}{ccc} \underline{\hat{\boldsymbol{a}}}_{10} & \ldots & \underline{\hat{\boldsymbol{a}}}_{n-1,0} \end{array}\right]$ bezüglich s werden als kinematische Differentialgleichun-

gen über die Ableitungen der Schraubachsen $\hat{\underline{\boldsymbol{a}}}'_{k0} = \frac{\mathrm{d}\hat{\underline{\boldsymbol{a}}}_k}{\mathrm{d}s}|_{q_{n0}}$ mit Hilfe des dualen Vektorproduktes ausgedrückt,

$$\hat{\underline{\boldsymbol{a}}}'_{k0} = -\sum_{i=1}^{k-1} \widetilde{\hat{\underline{\boldsymbol{a}}}}_{i0}\, \hat{\underline{\boldsymbol{a}}}_{k0}\, \lambda_{i0} \quad \text{mit} \quad \widetilde{\hat{\underline{\boldsymbol{a}}}} \equiv \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{a}} & \boldsymbol{0} \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_\varepsilon & \widetilde{\boldsymbol{a}} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Durch die sukzessive Elimination der relativen Gelenkkoordinaten, liefern die Mobilitätsbedingungen (3) nichlineare Gleichungen, welche ausschließlich von den Koordinaten $\hat{\underline{\boldsymbol{a}}}_{i0}, i = 1,\ldots,n$ der Schraubgelenke in einer aktuell betrachteten Lage des Mechanismus abhängen. Die Lösung aller Gleichungen in (3) von der Ordnung $m = 1$ bis zu einer noch unbekannten hinreichenden Ordnung $m = m_{\max}$, welche von der Art und Anzahl der Gelenke abhängt, liefert diejenigen Schraubenkoordinaten der Gelenkachsen in der aktuellen Lage, welche garantieren, dass der nH Mechanismus global beweglich ist, siehe auch [1]. Für einige überbestimmte Mechanismen konnte in [3] eine Abschätzung der Ordnung $m_{\max}$ durch die numerische Lösung von (3) angegeben werden. Eine Schwierigkeit, die analytische Lösung von (3) zu finden, liegt darin begründet, dass die Pseudoinverse $\boldsymbol{A}_0^+$ sowie die reziproken Schrauben $\hat{\underline{\boldsymbol{k}}}_{j0}, j = 1,\ldots,(6-\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}_0))$ nicht in algebraischer Form vorliegen. Jedoch können diese Ausdrücke für 4H Mechanismen auf Grundlage geometrischer Betrachtungen explizit angegeben werden. Die spezielle Pseudoinverse der Jacobimatrix $\boldsymbol{A}_0 = \begin{bmatrix} \hat{\underline{\boldsymbol{a}}}_{10} & \hat{\underline{\boldsymbol{a}}}_{20} & \hat{\underline{\boldsymbol{a}}}_{30} \end{bmatrix}$ gegeben durch

$$\boldsymbol{A}^+_{0,\mathrm{geom}} = \beta \begin{bmatrix} \widetilde{\hat{\underline{\boldsymbol{a}}}}_{20}\, \hat{\underline{\boldsymbol{a}}}_{30} & \widetilde{\hat{\underline{\boldsymbol{a}}}}_{30}\, \hat{\underline{\boldsymbol{a}}}_{10} & \widetilde{\hat{\underline{\boldsymbol{a}}}}_{10}\, \hat{\underline{\boldsymbol{a}}}_{20} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \Delta, \quad \beta = \frac{1}{(\widetilde{\hat{\underline{\boldsymbol{a}}}}_{10}\, \hat{\underline{\boldsymbol{a}}}_{20})^{\mathrm{T}} \Delta\, \hat{\underline{\boldsymbol{a}}}_{30}} \tag{5}$$

enthält die drei Schrauben $\widetilde{\hat{\underline{\boldsymbol{a}}}}_{20}\, \hat{\underline{\boldsymbol{a}}}_{30}$, $\widetilde{\hat{\underline{\boldsymbol{a}}}}_{30}\, \hat{\underline{\boldsymbol{a}}}_{10}$, $\widetilde{\hat{\underline{\boldsymbol{a}}}}_{10}\, \hat{\underline{\boldsymbol{a}}}_{20}$. Die Achsen dieser drei Schrauben sind jeweils die Gemeinlote der Schraubachsen zweier benachbarter Gelenke. Somit sind die angegebenen Schrauben reziprok zu je zwei der Gelenkschrauben $\hat{\underline{\boldsymbol{a}}}_{10}$, $\hat{\underline{\boldsymbol{a}}}_{20}$, $\hat{\underline{\boldsymbol{a}}}_{30}$ des 4H Mechanismus. Weitergehend können die drei Schrauben

$$\hat{\underline{\boldsymbol{k}}}_{10,\mathrm{geom}} = \widetilde{\hat{\underline{\boldsymbol{a}}}}_{20}\, \hat{\underline{\boldsymbol{a}}}_{30} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ h^* \widetilde{\boldsymbol{a}}_{20} \boldsymbol{a}_{30} \end{bmatrix}, \; \hat{\underline{\boldsymbol{k}}}_{20,\mathrm{geom}} = \widetilde{\hat{\underline{\boldsymbol{a}}}}_{30}\, \hat{\underline{\boldsymbol{a}}}_{10} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ h^* \widetilde{\boldsymbol{a}}_{30} \boldsymbol{a}_{10} \end{bmatrix}, \; \hat{\underline{\boldsymbol{k}}}_{30,\mathrm{geom}} = \widetilde{\hat{\underline{\boldsymbol{a}}}}_{10}\, \hat{\underline{\boldsymbol{a}}}_{20} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ h^* \widetilde{\boldsymbol{a}}_{10} \boldsymbol{a}_{20} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

mit

$$h^* = -\frac{1}{\beta\, (\widetilde{\boldsymbol{a}}_{10}\, \boldsymbol{a}_{20})^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{a}_{30}}, \tag{7}$$

angegeben werden, welche jeweils reziprok zu allen drei Gelenkschrauben $\hat{\underline{\boldsymbol{a}}}_{10}$, $\hat{\underline{\boldsymbol{a}}}_{20}$, $\hat{\underline{\boldsymbol{a}}}_{30}$ sind. Es existieren spezielle Lagen von 4H Mechansmen, in denen die aus geometrischen Betrachtungen gewonnen Ausdrücke $\boldsymbol{A}^+_{0,\mathrm{geom}}$ und $\hat{\underline{\boldsymbol{k}}}_{j0,\mathrm{geom}}, j = 1,\ldots,3$ nicht gültig sind. Diese Lagen müssen für die lokale Approximation als Ausgangslagen ausgeschlossen werden. In einem ersten Schritt kann für den BENNETT 4R Mechanismus gezeigt werden, dass die Mobilitätsbedingungen und somit auch die Schließbedingungen der Ordnung $m = 3$,

$$\boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{\boldsymbol{k}}}_{10,\mathrm{geom}} & \hat{\underline{\boldsymbol{k}}}_{20,\mathrm{geom}} & \hat{\underline{\boldsymbol{k}}}_{30,\mathrm{geom}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \Delta (-2\boldsymbol{A}'_0 \boldsymbol{A}^+_{0,\mathrm{geom}} \boldsymbol{A}'_0 + \boldsymbol{A}''_0) \boldsymbol{A}^+_{0,\mathrm{geom}} \hat{\underline{\boldsymbol{a}}}_{40}, \tag{8}$$

automatisch erfüllt sind, wenn die Mobilitätsbedingungen der Ordnungen $m = 1$ und $m = 2$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{0} &= \begin{bmatrix} \hat{\underline{\boldsymbol{k}}}_{10,\mathrm{geom}} & \hat{\underline{\boldsymbol{k}}}_{20,\mathrm{geom}} & \hat{\underline{\boldsymbol{k}}}_{30,\mathrm{geom}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \Delta\, \hat{\underline{\boldsymbol{a}}}_{40} \\ \boldsymbol{0} &= \begin{bmatrix} \hat{\underline{\boldsymbol{k}}}_{10,\mathrm{geom}} & \hat{\underline{\boldsymbol{k}}}_{20,\mathrm{geom}} & \hat{\underline{\boldsymbol{k}}}_{30,\mathrm{geom}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \Delta \boldsymbol{A}'_0 \boldsymbol{A}^+_{0,\mathrm{geom}}\, \hat{\underline{\boldsymbol{a}}}_{40} \end{aligned} \tag{9}$$

erfüllt sind. Dieses Ergebnis wird durch rekursives ineinander Einsetzen der Mobilitätsbedingungen unter Ausnutzung der geometrischen Eigenschaften des Schraubenproduktes erhalten, ohne die Mobilitäts- bzw. die Schließbedingungen explizit aufzulösen.

Literatur

[1] V. Alexandrov. Sufficient Condition for the Extendibility of an nth Order Flex of Polyhedra. *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, 39:367-378, 1998.

[2] R. Bartkowiak and C. Woernle. Numerical Synthesis of Overconstrained Mechanisms Based on Screw Theory. J. Lenarčič and M. M. Stanišić, editors, *Advances in Robot Kinematics*, pages 539-546. Springer, Berlin, 2010.

[3] R. Bartkowiak and C. Woernle. Numerical Determination of a sufficient Local Approximation Order of Loop-Closure Conditions for Overconstrained Mechanisms. *Eccomas Multibody Dynamics 2013. Book of Abstracts*, pages 569-573. Proceedings: CD. Zagreb, Croatia, 2013-07.

Ein Ansatz zur Kinematischen Mehrposen- / Mehrkörpersynthese
An Approach Towards Kinematic Multiposition / Multibody Synthesis

Dipl.-Ing. Kassim Abdul-Sater, Dr.-Ing. Franz Irlinger, Prof. Dr. rer. nat. Tim C. Lüth, TU München, Lehrstuhl für Mikrotechnik und Medizingerätetechnik, 85748 Garching, Deutschland, kassim.abdul-sater@tum.de

Kurzfassung

Der vorliegende Beitrag beschreibt einen Ansatz zur kinematischen Maßsynthese, der die Vorgabe einer unterschiedlichen Zahl diskreter Bewegungsposen mehrerer bewegter Glieder einer Gelenkstruktur erlaubt. Ansatzpunkt ist die Kombination verschiedener Maßsynthese Verfahren die dem Finite-Posen-Entwurfsansatz zuzuordnen sind. Hierzu finden zum einen die Synthesegleichungen binärer Drehgelenkketten (RR-Ketten) Anwendung. Zum anderen werden die Invarianten der Starrkörperbewegung verwendet und erlauben in Kombination mit der RR-Synthese die kinematische Mehrposen- / Mehrkörper-Maßsynthese. Die Methode wird am Beispiel eines sphärischen Watt-1-Getriebes demonstriert, von dem zwei Glieder je zwei Aufgaben-Orientierungen erfüllen und ein drittes Glied drei weitere posen erfüllt. Potenzielle technische Anwendungsszenarien der Entwurfmethodik kommen beispielsweise aus den Bereichen Möbeldesign, Cabrioentwicklung oder auch Architektur, wo zur Realisierung verwandelbarer Möbel oder Dachkonstruktionen die Bewegungsvorgabe mehrerer Glieder zweckmäßig ist.

Abstract

This paper provides a kinematic synthesis approach, where different numbers of finitely separated task poses of several links of a linkage can be prescribed. The procedure combines different synthesis methodologies and can be assigned to the finite position design approach. On the one hand, the design or synthesis equations of revolute jointed binary cranks (RR chains) are used. On the other hand the invariants of finite rigid motion are used. The methods are combined to yield what we call kinematic multiposition / multibody synthesis. The synthesis approach is demonstrated using a spherical Watt-1 linkage, where two links can reach two proscribed task orientations and another third link can reach three such orientations. Potential applications are for instance in the area of industrial design, automotive or also architecture, where for instance transformable furniture or retractable roofs require it to define several task poses of various parts.

1 Einleitung

Der Finite-Posen-Entwurfsansatz, [1], bezeichnet eine Synthesemethode zur Bestimmung der kinematischen Abmessungen von Gelenkstrukturen, sodass eine Struktur gegebener Topologie in einer endlichen Zahl gegebener Konfigurationen zusammengebaut werden kann. Die Konfigurationen sind dabei in Form einer endlichen (finiten) Zahl von Aufgaben-Posen eines oder mehrerer Glieder der Struktur vorgegeben. Die Bestimmung der Abmessungen erfolgt durch Ermittlung der Gelenke in einer Referenzkonfiguration.

Prominentestes Beispiel des Entwurfsansatzes ist die Burmester'sche Maß- oder auch Exaktlagensynthese der eben beweglichen RR-Kette, bestehend aus drei Gliedern und zwei Drehgelenken, [2]. Unter Verwendung graphisch-geometrischer Konstruktionen können die Abmessungen zwischen den beiden Drehgelenken der RR-Kette bestimmt werden, sodass diese maximal fünf vorgegebene Bewegungskonfigurationen erfüllt. Die maximal vorgebbare Pose-Zahl korrespondiert dabei zur Anzahl unbekannter Koordinaten der Gelenkpunkte in der Referenzkonfiguration der Gelenkstruktur. Das Problem lässt sich außerdem auch algebraisch unter Verwendung komplexer Vektor-Formulierungen erfassen, vgl. [3, 4]. Eine Verallgemeinerung der finiten Posen Synthese für weitere räumlich bewegliche Strukturen mit zwei Gelenken (binäre Strukturen) findet sich zum Beispiel in [5]. Neben binären Strukturen sind auch höhergliedrige serielle, ebene wie auch räumliche Ketten Gegenstand der Forschung, [6, 7].

Die verschiedenen binären oder auch höhergliedrigen seriellen Strukturen werden auch als Bausteine parallelkinematischer Strukturen mit einer oder mehreren kinematischen Schleifen verwendet. Bekanntestes Beispiel ist das ebene 4-Gelenk, welches durch Synthese zweier RR-Ketten entsteht. Die beiden RR-Ketten besitzen jeweils gleiche End-Glieder, d.h. Gestell sowie Koppel des 4-Gelenks, wobei für die Koppel Aufgabenposen vorgegeben werden. Höhergliedrige Strukturen wie eben und sphärisch bewegliche Strukturen mit mehreren kinematischen Schleifen wie 7- oder auch 10-Gelenke lassen sich ebenfalls durch systematisches Kombinieren unterschiedlicher RR-Ketten für vorgegebene Aufgabenposen synthetisieren, s. z.B. [8–10].

Ein wesentliches Merkmal der Maßsynthese mehrschleifiger Strukturen durch Kombination von Bausteinstrukturen ist, dass die maximal vorgebbare Zahl an Aufgaben-Posen für die Gesamtstruktur durch die verwendeten Bausteine festgelegt ist. Darüber hinaus ist zu beachten, das Bausteine nicht beliebig zusammengefügt werden können um eine mehrschleifige Struktur korrekt zu synthetisieren. Im Falle der RR-Kette liegt dies daran,

dass deren Synthese ausschließlich unter Verwendung von Bewegungsposen zweier nicht-direkt benachbarter Glieder erfolgen kann. Höhergliedrige Bausteinstrukturen besitzen diese Eigenschaft in entsprechend verschärfter Weise. Für höhergliedrige, mehrschleifige Strukturen resultiert dies darin, dass nur für verhältnismäßig wenige Glieder Posen definiert werden können. Ein Beispiel sind die ebenen und sphärischen Watt-1 7-Gelenkgetriebe, mit einem Bewegungsfreiheitsgrad, welche unter Verwendung ebener bzw. sphärischer RR-Synthese lediglich die *freie*[1] Posenvorgabe eines bewegten Gliedes erlauben.

Dem Umstand, dass beispielsweise das Watt-1-Getriebe mittels RR-Synthese lediglich für einen bewegten Körper synthetisierbar ist, stehen allerdings unterschiedliche Anwendungsszenarien gegenüber, welche von einer freien Posenvorgabe mehrere bewegter Glieder profitieren können. Beispiele kommen etwa aus den Bereichen Möbeldesign, Cabrioentwicklung oder auch Architektur, wo zur Realisierung verwandelbarer Möbel oder Dachkonstruktionen die Bewegungsvorgabe mehrerer Glieder zweckmäßig ist. Daher wird in diesem Beitrag ein Ansatz zur kinematischen Mehrkörpersynthese vorgestellt, der die freie Vorgabe unterschiedlicher Posen mehrerer bewegter Glieder einer Gelenkstruktur erlaubt. Der Ansatz wird am Beispiel eines sphärischen Watt-1-Getriebes demonstriert und kombiniert sphärische RR-Synthese mit der Drehachse der sphärischen diskreten Bewegung. Daher wird nachfolgend zunächst die definition diskreter sphärischer Aufgaben-Posen beschrieben und darauf aufbauend relative Aufgaben-Posen definiert. Diese bilden den Ausgangspunkt zur Synthese des sphärischen Watt-1-Getriebes in einer Referenzkonfiguration. Wir erweitern damit die Vorarbeiten aus [11] auf, wo Ansätze zur 2-Körper / 2-Posen-Synthese ebener 4- und 7-Gelenkgetriebe beschrieben sind.

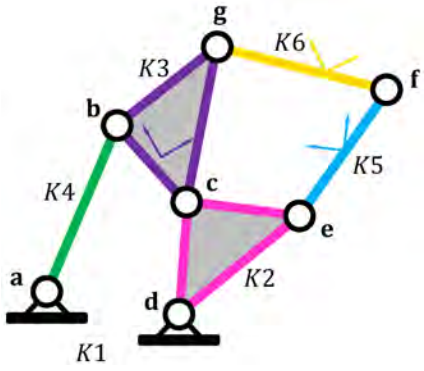


Bild 1 Ebenes Ersatzschema des sphrärischen Watt-1-Gelenkgetriebes mit Körpern $K3$, $K5$ und $K6$, für die diskrete Bewegungsposen (Orientierungen) vorgebbar sind.

Bild 1 zeigt das ebene Ersatzschema einer sphärischen Watt-1-Struktur. Aufgrund einer sphärischen Gelenkstruktur schneiden sich sämtliche Gelenkachsen in einem Punkt. Dieser bildet das Drehzentrum der sphärischen Bewegungen sämtlicher bewegter Glieder $K2$, $K3$,...,$K6$ und repräsentiert den Koorinatenursprung O eines unbewegten Referenzkoordinatensystems W für die Syntheseberechnungen. (Glied $K1$ sei hier W zugeordneter Gestellkörper).

Die sieben Drehgelenkachsen lassen sich für das sphärische Syntheseproblem eindeutig durch die sieben Richtungsvektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$,..., $\mathbf{g}$ mit Koordinatendarstellung in W beschreiben.

2 Definition von Aufgaben-Posen

Glieder der Watt-1-Struktur mit vorgebenen Aufgabenposen seien im Folgenden $K3$, $K5$ und $K6$. Zur Beschreibung der Bewegung dieser seien drei körperfeste Koordinatensysteme $B3$, $B5$ und $B6$, ebenfalls mit Koorinatenursprung O, definiert. (Zur Kennzeichnung im ebenen Ersatzschema in Abbildung 1 sind diese jeweils direkt an den Gliedern $K3$, $K5$ und $K6$ dargestellt). Unter Verwendung von Längengrad-, Breitengrad- und Rollwinkeln θ, ϕ und ψ kann die Beschreibung von $i = 1,\ldots,n$ endlich benachbarten Orientierungen (im Folgenden auch als Aufgaben-Orientierungen bezeichnet) dann unter Verwendung folgender Drehkomposition erfolgen:

$$\mathbf{R}^i_{Bk} = \mathbf{R}_y(\theta^i)\mathbf{R}_x(-\phi^i)\mathbf{R}_z(\psi^i) \quad i = 1,\ldots,n,\ k = 3,5,6. \tag{1}$$

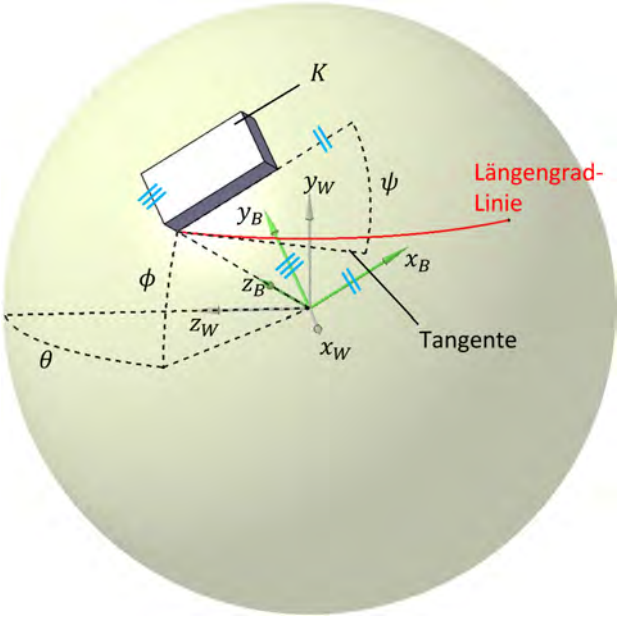


Bild 2 Zur Veranschaulichung von Längengrad-, Breitengrad- und Rollwinkeln.

Bild 2 veranschaulicht die Drehkomposition zur Definition einer Aufgaben-Orientierung eines Körpers K mit zugehörigem Koordinatensystem B auf der Sphäre.

Da bei gegebenen Orientierungen $\mathbf{R}^i_{Bk}$ das Ziel der Maßsynthese die Bestimmung der Gelenkachsen in einer Referenzkonfiguration 1 sein wird, ist es zweckmäßig Gl. (1) in eine Relativposen-Darstellung zu überführen (s. hierzu z.B. [12]):

$$\mathbf{R}^{1i}_{Bk} = \mathbf{R}^i_{Bk}(\mathbf{R}^1_{Bk})^T \qquad i = 2,\ldots,n. \tag{2}$$

[1] 'Freie Posenvorgabe' bedeutet hier im Zusammenhang mit Maßsynthese die gänzlich unabhängige Vorgabe der eine Pose definierenden Parameter.

Die 3×3-Matrix $\mathbf{R}^{1i}_{Bk}$ erlaubt es, eine beliebige Konfiguration i einer Achsrichtung $\mathbf{x}$ durch Referenzkonfiguration 1 auszudrücken:

$$\mathbf{x}^i = \mathbf{R}^{1i}_{Bk}\cdot\mathbf{x}^1, \qquad i=2,\ldots,n. \tag{3}$$

Bei gegebenen Aufgaben-Orientierungen $\mathbf{R}^i_{Bk}$, $k = 3,5,6$ wird damit in Abschnitt 5 die Mehrkörper-Bewegungsaufgabe zur Synthese der Watt-1-Struktur definiert.

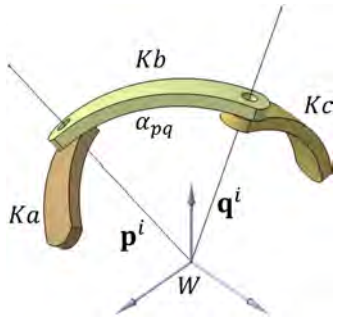


Bild 3 Die allgemeine sphärische RR-Kette

3 Sphärische RR-Synthese

Die Gelenkachsen **a**, **b**, **c** und **d** der Watt-Struktur bilden ein 4-Gelenk, welches eine 'isolierte' kinematische Schleife in der Watt-Struktur bildet. Daher lässt sich diese unter Verwendung der Synthesegleichungen der sphärischen RR-Ketten zunächst unabhängig von den übrigen Gliedern $K5$ und $K6$ synthetisieren. Die Synthesegleichung einer allgemeinen sphärischen RR-Kette bestehend aus drei bewegten Gliedern Ka, Kb und Kc und zwei sich schneidenden Achsen **p** und **q** basiert auf der folgenden Zwangsbedingung:

$$\left(\mathbf{p}^i\right)^T\cdot\mathbf{q}^i = |\mathbf{p}^i||\mathbf{q}^i|\cos\alpha_{pq}, \qquad i=1,\ldots,n. \tag{4}$$

(S. auch **Bild 3**) Diese beschreibt die Konstanz des eingeschlossenen Winkels zwischen **p** und **q** in sämtlichen Konfigurationen i. Werden die Bewegungen der Achsen beschrieben als $\mathbf{p}^i = \mathbf{R}^{1i}_{Ba}\cdot\mathbf{p}^1$ und $\mathbf{q}^i = \mathbf{R}^{1i}_{Bc}\cdot\mathbf{q}^1$, so erhält man nach Einsetzen in (4), Subtraktion der ersten Gleichung ($i=1$) sowie Äquivalenzumformungen die bilinearen, skalaren Design- oder Synthesegleichungen der sphärischen RR-Kette zu

$$\left(\mathbf{p}^1\right)^T\cdot\left((\mathbf{R}^{1i}_{Bc})^T\mathbf{R}^{1i}_{Ba}-\mathbf{E}\right)\cdot\mathbf{q}^1 = 0, \qquad i=2,\ldots,n, \tag{5}$$

worin **E** die 3×3 Einheitsmatrix ist.
Bei gegebenen Bewegungsgrößen $\mathbf{R}^{1i}_{Ba}$ und $\mathbf{R}^{1i}_{Bc}$ definieren die sechs W-Koordinaten x^1_p, y^1_p, z^1_p, x^1_q, y^1_q und z^1_q die Unbekannten Größen des Syntheseproblems, welche die RR-Kette in Referenzkonfiguration 1 definieren. Da der Betrag von **p** und **q** allerdings unerheblich ist für die Lösung des Problems, sind nur vier der sechs Parameter tatsächlich unbekannt. Damit besitzt die sphärische RR-synthese vier unbekannte und das Problem wird offensichtlich eindeutig durch vier Gleichungen bestimmt. Diese liegen für fünf Posen von Ba und Bc vor, sodass gilt $n_{max} = 5$ (s. auch z.B.: [13]). Der Einfachheit halber wird im Folgenden der Fall $n=3$ im Rahmen der Mehrkörpersynthese verwendet und sei daher noch kurz erläutert.
Für $n=3$ liegen zwei skalare Designgleichungen (5) vor. Damit lassen sich zwei der vier unbekannten frei wählen, z.B. $\mathbf{p}^1$, sodass sich (5) auch schreiben lässt als:

$$a^i(\mathbf{p}^1)\cdot x^1_q + b^i(\mathbf{p}^1)\cdot y^1_q + c^i(\mathbf{p}^1)\cdot z^1_q = 0, \qquad i=2,3, \tag{6}$$

mit $\left(\mathbf{p}^1\right)^T\cdot\left((\mathbf{R}^{1i}_{Bc})^T\mathbf{R}^{1i}_{Ba}-\mathbf{E}\right) = (a^i,b^i,c^i) = (\mathbf{u}^i)^T$. Durch (6) sind zwei Ebenen-Gleichungen definiert, die eine Schnittgerade durch den Ursprung O von W besitzen (falls die Ebenen nicht parallel sind). Ein Richtungsvektor dieser Geraden ist dann bestimmbar als

$$\mathbf{q}^1 = \mathbf{u}^2\times\mathbf{u}^3. \tag{7}$$

4 Die Generalisierte Drehachse

Wie im vorangegangenen Abschnitt gezeigt, lässt sich die sphärische RR-Kette für maximal fünf diskret vorgebene Aufgaben-Orientierungen synthetisieren. Die Designgleichungen beinhalten dabei allerdings die Bewegungen der Glieder Ka und Kc, während die Bewegungen von Kb nicht vorgebbar sind. Dies kennzeichnet gerade die Eigenschaft der RR-Synthese, keine direkt-benachbarten Körper koppeln zu können (- dies gilt im Übrigen auch für die ebene und räumliche RR-Kette).
Um auch eine Synthesevorschrift zur Bestimmung eines einzelnen Gelenks zwischen zwei direkt benachbarten Gliedern Ka und Kb zu erhalten wird folgende Situation betrachtet. Gegeben seien je zwei allgemein räumliche Orientierungen von Ka und Kb, d.h. $\{\mathbf{R}^1_{Ba},\mathbf{R}^2_{Ba}\}$ und $\{\mathbf{R}^1_{Bb},\mathbf{R}^2_{Bb}\}$. Unter Verwendung von (2) erhält man die relativen transformationen $\mathbf{R}^{12}_{Ba} = \mathbf{R}^2_{Ba}(\mathbf{R}^1_{Ba})^T$ und $\mathbf{R}^{12}_{Bb} = \mathbf{R}^2_{Bb}(\mathbf{R}^1_{Bb})^T$.
Eine die beiden Glieder koppelnde Gelenkachse mit Richtungsvektor **p** muss nun die beiden Abbildungsgleichungen

$$\mathbf{p}^2 = \mathbf{R}^{12}_{Ba}\cdot\mathbf{p}^1 \quad\text{und}\quad \mathbf{p}^2 = \mathbf{R}^{12}_{Bb}\cdot\mathbf{p}^1 \tag{8}$$

erfüllen. Subtrahieren der beiden Gleichungen eliminiert $\mathbf{p}^2$ und Umstellen liefert

$$\left(\mathbf{E}-\mathbf{R}_{Ba|Bb}\right)\cdot\mathbf{p}^1 = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{R}_{Ba|Bb} = (\mathbf{R}^{12}_{Ba})^T\mathbf{R}^{12}_{Bb}. \tag{9}$$

Eine Gleichung der Gestalt $(\mathbf{E}-\mathbf{R})\cdot\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ist als Bestimmungsgleichung der Drehachse der sphärischen Bewegung bekannt, vgl. [14, 15]. Typischer Weise ist durch **R** jedoch die Drehbewegung eines einzelnen Gliedes gegenüber seiner unbewegten Umgebung beschrieben. $\mathbf{R}_{Ba|Bb}$ beinhaltet stattdessen die Bewegung zweier Glieder gegenüber der unbewegten Umgebung. Wird einer der beiden Körper Ka oder Kb starr mit der Umgebung verbunden so erhält man $\mathbf{R}^{12}_{Ba} = \mathbf{E}$ oder $\mathbf{R}^{12}_{Bb} = \mathbf{E}$ und (9) wird zur Gleichung der 'gewöhnlichen' Drehachse. Wir wollen (9) in allgemeiner Form daher hier als 'generalisierte' Gleichung einer Drehachse oder auch Gleichung der generalisierten Drehachse bezeichnen und können festhalten:
Ein Vektor $\mathbf{p}^1$ *der Gleichung (9) erfüllt kann (i) als Richtungsvektor einer die Glieder Ka und Kb koppelnden Gelenkachse in Konfiguration 1 betrachtet werden oder (ii) als Richtungsvektor der Drehachse der durch* $\mathbf{R}_{Ba|Bb}$ *gegebe-*

nen Bewegung angesehen werden.
Die Idee der generalisierten Drehachse sphärischer Bewegung repräsentiert einen Sonderfall und lässt sich auch auf die allgmein räumliche Bewegung übertragen, vgl. [16, 17]. Entsprechend kann dann von der generalisierten Schraubachse der diskreten räumlichen Bewegung gesprochen werden.
Zur Ermittlung von $\mathbf{p}^1$ für gegebene Bewegungsgrößen eignet sich z.B. die Cayley-Abbildung, s. z.B. [14]. Diese liefert einen fundamentalen Zusammenhang zwischen Drehmatrizen $\mathbf{R}$ und schiefsymmetrischen Matrizen $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{R} = (\mathbf{H}-\mathbf{E})^{-1}(\mathbf{H}+\mathbf{E}). \tag{10}$$

So lässt sich aus (10) bei einer gegebenen schiefsymmetrischen Matrix eine zugehörige Drehmatrix ermitteln. Nach Äquivalenzumformung erhält man

$$\mathbf{H} = (\mathbf{R}-\mathbf{E})(\mathbf{R}+\mathbf{E})^{-1}, \tag{11}$$

was die Ermittlung einer schiefsymmetrischen Matrix bei gegebener Drehung erlaubt.
Nach Einsetzen der Cayley-Abbildung (10) in $(\mathbf{E}-\mathbf{R})\cdot\mathbf{x} = \mathbf{0}$ erhält man nach Umstellen

$$\mathbf{H}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{0}, \qquad \text{bzw.} \qquad \mathbf{h}\times\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{12}$$

nach Ersetzen von $\mathbf{H}\cdot$ durch den Vektor $\mathbf{h}$ mit den den drei unabhängigen Parametern von $\mathbf{H}$ und das Kreuzprodukt. Selbstverständlich ist $\mathbf{x} = \mathbf{h}$ eine Lösung von (12) und damit auch von der Gleichung der Drehachse. Die Parameter von $\mathbf{h}$ erhält man bei gegebener Drehbewegung durch Lösung von (11). Zur Lösung von (9) lassen sich die Parameter von $\mathbf{p}^1$ entsprechend aus folgender Gleichung bestimmen.

$$\mathbf{P}^1 = (\mathbf{R}_{Ba|Bb}-\mathbf{E})(\mathbf{R}_{Ba|Bb}+\mathbf{E})^{-1}. \tag{13}$$

5 Mehrposen- / Mehrkörper-Synthese eines Sphärischen Watt-1-Getriebes

Die angestrebte Mehrkörpersynthese zur Nutzung mehrerer bewegter Glieder höhergliedriger Gelenkstrukturen kombiniert die sphärische RR-Synthese mit der generalisierten Drehachse und wird am Beispiel des sphärischen Watt-1-Getriebes demonstriert.

5.1 3-Posen Synthese einer 4-Gelenk-Substruktur

Wie bereits zuvor erwähnt, besitzt das Watt-1-Getriebe das aus den Gelenkachsen **a**, **b**, **c** und **d** bzw. den Gliedern $K1,\ldots,K4$ bestehende 4-Gelenk als Substruktur (s. Bild 1). Dieses besitzt bekanntlich Bewegungsfreiheitsgrad 1 und kann zunächst isoliert von den übrigen Gliedern der Watt-Struktur synthetisiert werden. Hierzu sind in **Tabelle 1** drei Aufgaben-Orientierungen des Gliedes $K3$, bzw. des mitbewegten Koordinatensystems $B3$ definiert.

Table 1 Aufgaben-Orientierungen für Glied $K3$ zur 3-Posen Synthese der 4-Gelenk-Substruktur des sphärischen Watt-1-Getriebes

Längengradwinkel	*Breitengradwinkel*	*Rollwinkel*
$\theta^1_{B3} = 10$ deg	$\phi^1_{B3} = 15$ deg	$\psi^1_{B3} = 0$ deg
$\theta^2_{B3} = 25$ deg	$\phi^2_{B3} = 35$ deg	$\psi^2_{B3} = 0$ deg
$\theta^3_{B3} = 65$ deg	$\phi^3_{B3} = 42$ deg	$\psi^3_{B3} = 0$ deg

(Da der Rollwinkel ψ stets gleich Null definiert ist, ist durch die Posedaten ein rollwinkelfreie Orientierungs-Aufgabe definiert. Ein Beispiel solcher Aufgaben ist das rollwinkelfreie Führen einer Kamera zur Vermeidung von gegen die Horizontale verkippten Bilden.)
Wie in Abschnitt 3 beschrieben, lässt sich ein 3-Posen-Problem nach Wahl der Koordinaten einer der beiden Achsrichtungen der sphärischen RR-Kette in Konfiguration 1 lösen. Für das vorliegende 4-Gelenk (bestehend aus zwei parallel angeordneten RR-Ketten) wurden daher die Koordinaten von $\mathbf{b}^1$ und $\mathbf{c}^1$ gewählt und jene von **a** und **d** unter Verwendung von (5) - (7) berechnet. Gleichung (5) nimmt hierzu folgende Formen an:

$$\left(\mathbf{b}^1\right)^T \cdot \left((\mathbf{R}^{1i}_{B3})^T - \mathbf{E}\right)\cdot\mathbf{a} = 0, \qquad i = 2,3 \quad \text{und} \tag{14}$$

$$\left(\mathbf{c}^1\right)^T \cdot \left((\mathbf{R}^{1i}_{B3})^T - \mathbf{E}\right)\cdot\mathbf{d} = 0, \qquad i = 2,3. \tag{15}$$

Die Drehmatrix wird dabei entsprechend Abschnitt 2 bestimmt. Man erkenne hierin, dass $\mathbf{R}^{1i}_{B1} = \mathbf{E}$, da **a** und **d** gestellfeste Achsen definieren.

Table 2 Normalisierte Achsrichtungen aus der 3-Posen Synthese der 4-Gelenk-Substruktur des sphärischen Watt-1-Getriebes

a	$\mathbf{b}^1$	$\mathbf{c}^1$	**d**
0.933	0.351	0.168	0.799
−0.121	0.347	0.259	−0.056
0.34	0.87	0.951	0.598

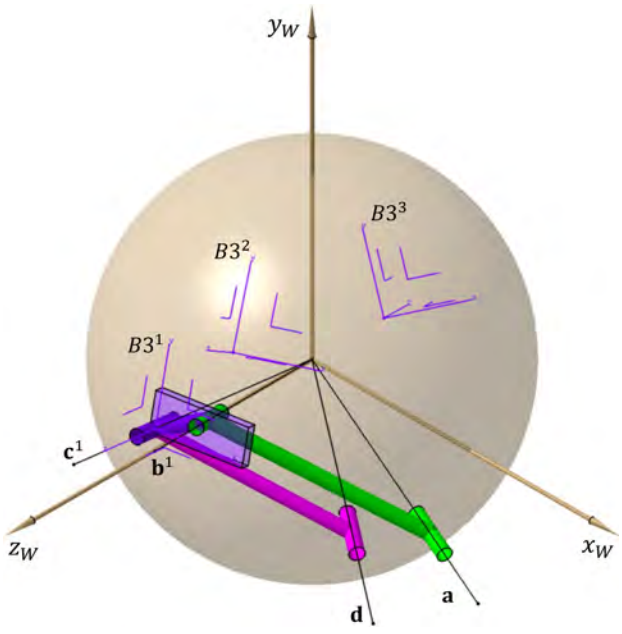


Bild 4 Die synthetisierte 4-Gelenk-Substruktur des Watt-Getriebes

In **Tabelle 2** finden sich die frei gewählten sowie unter Verwendung von (7) berechneten, normalisierten Achsrichtungen der 4-Gelenksynthese. Ein grobes CAD-Modell des 4-Gelenks in Referenzkonfiguration 1 ist in **Bild 4** gezeigt. (Auf explizites Einzeichnen der Richtungsvektoren der Achsen wurde hier verzichtet)
Durch die Syntheseergebnisse ist zunächst sichergestellt, dass der Mechanismus in allen drei vorgegebenen Konfigurationen zusammengebaut werden kann. Unter Verwendung der Kinematik-Simulationsfunktionalitäten des verwendeten CAD-Systems konnte jedoch gezeigt werden, dass sich das 4-Gelenk durch Aktuierung von Glied $K4$ bezüglich der durch **a** definierten Achse auch kontinuierlich zwischen den drei Aufgaben-Orientierungen von $K3$ verfahren lässt. Damit ist prinzipiell kinematische Funktionsfähigkeit der Struktur gegeben, sodass diese im nächsten Syntheseschritt zum Watt-Getriebe erweitert werden kann.

5.2 Synthese des Watt-1-Getriebes

Um das für drei posen synthetisierte 4-Gelenk zur Watt-1-Struktur zu erweitern sind die Achsrichtungen $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{f}^1$ und $\mathbf{g}^1$ zu ermitteln. Man erinnere sich hierzu daran, dass dabei auch noch Aufgaben-Orientierungen für die Glieder $K5$ und $K6$ vorgegeben werden sollen, vgl. Bild 1. Der strukturelle Aufbau des Watt-Getriebes verbietet alledings eine erneute Anwendung der RR-Synthese. Daher wird die generalisierte Drehachse aus Abschnitt 4 im Folgenden für die Ermittlung der übrigen Achsrichtungen verwendet.
Die Verwendung der generalisierten Drehachse erlaubt lediglich die Vorgabe von zwei Aufgaben-Orientierungen für die beteiligten Glieder. Daher sind in **Tabelle 3** entsprechend je zwei Aufgaben-Orientierungen der nun zusätzlich betrachteten Glieder $K5$ und $K6$ definiert.

Table 3 Aufgaben-Orientierungen für Glieder $K5$ und $K6$ zur Vervollständigung der Watt-1-Struktur

Längengradwinkel	*Breitengradwinkel*	*Rollwinkel*
$\theta^1_{B5} = -15$ deg	$\phi^1_{B5} = 25$ deg	$\psi^1_{B5} = 90$ deg
$\theta^2_{B5} = 30$ deg	$\phi^2_{B5} = 75$ deg	$\psi^2_{B5} = 100$ deg
$\theta^1_{B6} = 55$ deg	$\phi^1_{B6} = 25$ deg	$\psi^1_{B6} = 0$ deg
$\theta^2_{B6} = 130$ deg	$\phi^2_{B6} = 35$ deg	$\psi^2_{B6} = -62.5$ deg

Zur Bestimmung der die Glieder $K5$ und $K6$ verbindenden Achse ist folgende Gleichung unter Verwendung der Cayley-Abbildung aus Abschnitt 4 zu lösen:

$$\left(\mathbf{E} - \mathbf{R}_{B5|B6}\right) \cdot \mathbf{f}^1 = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{R}_{B5|B6} = (\mathbf{R}^{12}_{B5})^T \mathbf{R}^{12}_{B6}. \quad (16)$$

Als nächstes kann eine solche Gleichung auch für $\mathbf{g}^1$ definiert und gelöst werden, da Orientierungen für $K3$ aus dem vorigen Abschnitt mit jenen für $K5$ kombiniert werden können. Dabei ist nun allerdings zu beachten, dass für $K3$ ein 3-Posen Problem definiert wurde. Damit sind zwei Kombinationsmöglichkeiten gegeben:

$$\left(\mathbf{E} - \mathbf{R}_{B3|B6}\right) \cdot \mathbf{g}^1 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}_{B3|B6} = (\mathbf{R}^{12}_{B3})^T \mathbf{R}^{12}_{B6} \text{ bzw.} \quad (17)$$

$$\left(\mathbf{E} - \mathbf{R}_{B3|B6}\right) \cdot \mathbf{g}^1 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}_{B3|B6} = (\mathbf{R}^{13}_{B3})^T \mathbf{R}^{12}_{B6}. \quad (18)$$

Gleichung (17) setzt die Konfigurationen 1 und 2 von $K3$ wie auch $K6$ zueinander in Beziehung. Demgegenüber erwirkt (18), dass $K3$ Konfigurationen 1 und 3 erfüllt, während $K6$ jeweils gleichzeitig Konfiguration 1 und 2 erfüllt. Für das vorliegende Beispiel wird im Weiteren (18) verwendet.
Zur Bestimmung der letzten Achsrichtung $\mathbf{e}^1$ ist es wichtig zu erkennen, dass **e** die Glieder $K2$ und $K5$ koppelt und damit auch Teil des bereits für drei Orientierungen synthetisierten 4-Gelenks ist. Daher lassen sich für die Bestimmungsgleichung von $\mathbf{e}^1$ ebenfalls Konfigurationen-Kombinationen für $K2$ und $K5$ angeben. Hierzu werden im Folgenden ebenfalls Konfigurationen 1 und 3 von $K2$ sowie Konfigurationen 1 und 2 von $K5$ verwendet:

$$\left(\mathbf{E} - \mathbf{R}_{B2|B5}\right) \cdot \mathbf{e}^1 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}_{B2|B5} = (\mathbf{R}^{13}_{B2})^T \mathbf{R}^{12}_{B5}. \quad (19)$$

Während $\mathbf{R}^{12}_{B5}$ unmittelbar unter Verwendung der Posedaten aus Tabelle 3 sowie (1) bzw. (2) konstruiert werden kann, sind die Konfigurationen 1 und 3 von $K2$ noch unbekannt und müssen zuerst am 4-Gelenk ermittelt werden. Da das 4-Gelenk am Glied $K4$ aktuiert wird, sind die Konfigurationen von $K2$ durch den Abtriebswinkel bezüglich der Achse **d** definiert. Dieser kann für die erforderlichen Konfigurationen 1 und 3 entweder über eine direkte kinematische Analyse (s. hierzu z.B. [12]) oder, wie hier der Einfachheit halber, im CAD-System ermittelt werden. **Tabelle 4** listet die Winkel zur Definition der Orientierungen von $K2$ bzw. $B2$.

Table 4 Im CAD-System gemessene Winkel zur Definition von Aufgaben-Orientierungen für Glied $K2$ bzw. $B2$

Längengradwinkel	*Breitengradwinkel*	*Rollwinkel*
$\theta^1_{B2} = 53.185$ deg	$\phi^1_{B2} = -3.222$ deg	$\psi^1_{B2} = 65.734$ deg
$\theta^3_{B2} = 53.185$ deg	$\phi^3_{B2} = -3.222$ deg	$\psi^3_{B2} = -12.113$ deg

Längengrad- und Breitengradwinkel wurden dabei zur Orientierung von $B2$ verwendet, sodass dessen z-Achse in Richtung von **d** ausgerichtet wird. Der Rollwinkel definiert dann die Drehbewegung bezüglich **d**.
Unter Verdendung der verschiedenen Posedaten wurden die Gleichungen (16), (18) und (19) für die Achsrichtungen $\mathbf{f}^1$, $\mathbf{g}^1$ und $\mathbf{e}^1$ gelöst, s. **Tabelle 5**.

Table 5 Normalisierte Achsrichtungen $\mathbf{f}^1$, $\mathbf{g}^1$ und $\mathbf{e}^1$ zur Vervollständigung des sphärischen Watt-1-Getriebes

$\mathbf{f}^1$	$\mathbf{g}^1$	$\mathbf{e}^1$
$\begin{pmatrix} 0.211 \\ 0.722 \\ 0.659 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.77 \\ 0.198 \\ 0.607 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.119 \\ 0.133 \\ 0.984 \end{pmatrix}$

Bild 5 zeigt das vollständige Watt-1-Getriebe in sämtlichen drei druch $K3$, $K5$ und $K6$ definierten Aufgaben-Konfigurationen. Durch Simulation konnte auch gezeigt werden, dass die Struktur nach Vorgabe eines Antriebswinkels bezüglich **a** kontinuierlich zwischen den drei Konfigurationen Verfahren werden kann.

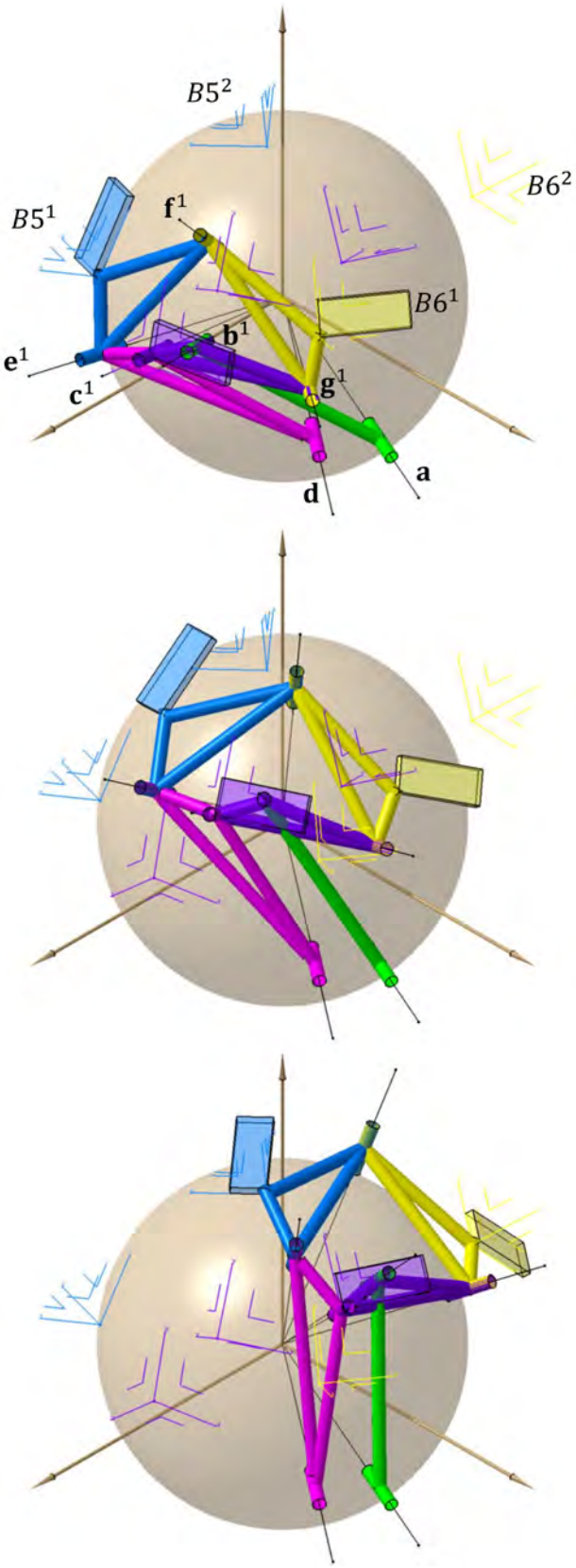


Bild 5 Beispiel einer Mehrposen- / Mehrkörpersynthese: Drei vorgegebene Posen für $K3$ sowie je zwei vorgebene Posen für $K5$ und $K6$ eines sphärischen Watt-1 7-Gelenkgetriebes

6 Zusammenfassung und Ausblick

Der Vorliegende Beitrag beschreibt eine Methode zur finiten Posen Synthese von Gelenkstrukturen, sodass unterschiedliche Anzahlen an Glieder-Posen mehrerer bewegter Körper möglich sind. Die Methode kombiniert dabei unterschiedliche Verfahren zur Synthese von Bausteinstrukturen höhergliedriger Mechanismen - namentlich die Synthese der RR-Kette sowie ein Verfahren basierend auf den Invarianten der diskreten Starrkörperbewegung. Demonstriert wird die Mehrkörpersynthese-Entwurfsmethodik am Beispiel eines sphärischen Watt-1 Gelenkgetriebes.
Zukünftige Arbeiten können die Kombination von Bewegungs-Invarianten mit Syntheseverfahren weiterer Bausteinstrukturen umfassen. Diese Arbeiten sind dabei stets im Bezug zu einer Mechanismen-Topologie (wie hier dem Watt-1 Getriebe) durchzuführen, da der strukturelle Aufbau entscheidend für die Kombinierbarkeit ist.

7 References

[1] Roth, B.: *Finite Position Theory Applied to Mechanism Synthesis*. ASME Journal of Applied Mechanics, 34(3), September, pp. 599-605, 1967

[2] Burmester, L.: *Lehrbuch der Kinematik*. Arthur Felix, Leipzig, Germany, 1886

[3] Freudenstein, F.; Sandor, G. N.: *On the Burmester Points of a Plane*. ASME Journal of Applied Mechanics, 28 (1), pp. 41-49, 1961

[4] Luck, K.; Modler, K.-H.: *Getriebetechnik - Analyse, Synthese, Optimierung, 2. Auflage*. Springer, Berlin Heidelberg, 1995

[5] Tsai, L. W.; Roth, B.: *Design of Dyads with Helical, Cylindrical, Spherical, Revolute and Prismatic Joints*. Mechanism and Machine Theory, vol. 7, pp. 85-102, 1971

[6] Perez, A.; McCarthy, J. M.: *Clifford Algebra Exponentials and Planar Linkage Synthesis Equations*. ASME Journal of Mechanical Engineering, 127 (5), pp. 931-940 (16), 2005

[7] Perez-Gracia, A.; McCarthy, J. M.: *The Kinematic Synthesis of Spatial Serial Chains Using Clifford Algebra Exponentials*. Proc. IMechE Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 220 (7), pp. 953-968 (16), July 2006

[8] Soh, G. S.; McCarthy, J. M.: *The Synthesis of Planar Six-Bar Linkages as Constrained 3R Chains*. Mechanism and Machine Theory, 43 (2), pp. 160-170, 2008

[9] Soh, G. S.; McCarthy, J. M.: *Synthesis of Mechanically Constrained Planar 2-RRR Parallel Robots*. Proc. 12th IFToMM World Congress, 2007

[10] Sonawale, K. H., Arredondo, A. ; McCarthy, J. M.: *Computer Aided Design of Useful Spherical Watt 1 Six-Bar Linkages*. ASME 2013 IDETC, 37th Mechanisms and Robotics Conference, Parts A and B, V06AT07A064, 2013

[11] Abdul-Sater, K., Irlinger, F., Lüth, T. C.: *CAD-*

integrierte kinematische Auslegung ebener Gelenkgetriebe. In: VDI Bewegungstechnik, 16. Getriebetagung, September, S. 225-241, 2012

[12] McCarthy, J. M. and Soh, G. S.: *Geometric design of linkages*. 2nd edition, Springer Interdisciplinary Applied Mathematics, New York, 2010

[13] Chiang, C. H.: *Kinematics of Spherical Mechanisms*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1988

[14] Husty, M.; Karger, A.; Sachs, H.; Steinhilper, W.: *Kinematik und Robotik*. Springer, Berlin Heidelberg, 1997

[15] McCarthy, J. M.: *An Introduction to Theoretical Kinematics*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts London, England, 1990

[16] Abdul-Sater, K.; Irlinger, F.; Lüth, T. C.: *Two-Configuration Synthesis of Origami-Guided Planar, Spherical and Spatial Revolute-Revolute Chains*. ASME Journal of Mechanisms and Robotics, vol. 5, p. 10, June 2013

[17] Abdul-Sater, K.; Lüth, T. C.; Irlinger, F.: *Kinematic Design of Miura-Ori-Based Folding Structures Using the Screw Axis of a Relative Displacement*. In: Advances in Robot Kinematics, J. Lenarcic and O. Khatib (eds.), Springer, pp. 233-241, 2014

Detecting rigid substructures in spatial nucleationfree spherical-spherical bar mechanisms based on kinematical loops

Florian Simroth[1], **Huafeng Ding**[2], **Andrés Kecskeméthy**[1]

[1] Chair of Mechanics and Robotics
University of Duisburg-Essen , Lotharstr. 1, 47057 Duisburg, Germany
[Florian.Simroth, Andres.Kecskemethy]@uni-due.de

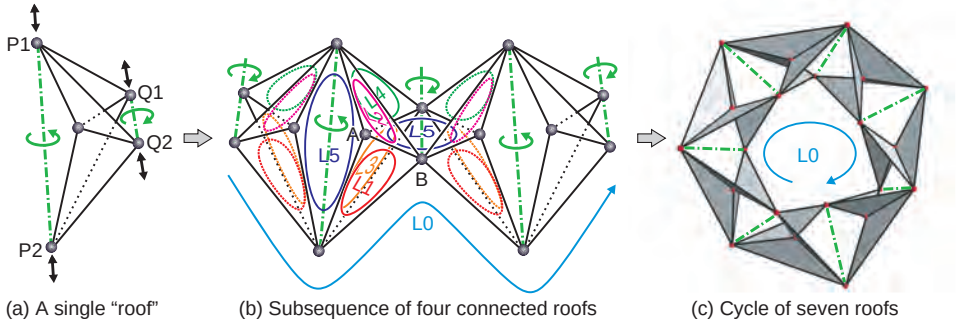
[2] College of Mechanical Engineering and Applied Electronics Technology
Beijing University of Technology, Beijing 100124, China
dhf@ysu.edu.cn

Abstract

Localization of rigid substructures in multibody systems is still an open research field with many applications in mechanism analysis and synthesis, especially for so-called "frameworks" consisting of spherical-spherical rods. While for planar systems effective methods based on Laman's theorem [1] exist, the 3D case still poses open challenges. In this paper, a new approach for rigidity detection [4] (used for solving the "double-banana" case) based on modeling of multibody systems as systems of interconnected loops [2] is applied to the recently presented challenge of so-called nucelationfree mechanisms [3], which contain intrinsically movable substructures whose rigidity can be detected only from the global couplings.

The regarded system [3] consists of seven topologically identical "roofs" (Fig. 1a), each representing a spherical mechanism that can be deformed by moving the endpoints (P1/P2 or Q1/Q2) along their connecting line (termed "implied edge" in [3]) and which can rotate about the implied edges without deformation. By connecting seven roofs as in Fig. 1b) in a cycle together, a mechanism consisting of altogether 56 rods and 91 spherical-spherical constraints is obtained, yielding $336-273=63$ degrees of freedom (DOF), composed by 56 isolated DOF of the rods plus 6 rigid-body DOF plus one proper DOF for the internal mobility of the whole mechanism. Obviously, this mobility corresponds to the 1-DOF of the 7R loop L_0 in which the roofs are now rigid and can only rotate about their implied edges (Fig. 1c).

While it is very difficult to detect rigidity of the roofs in the cycle by conventional DOF counting algorithms, tracking of isolated DOFs within the loops and their couplings makes this identification easy. To this end, regard the mechanism as a system of smallest independent loops [2], which are here e.g. the four triangle loops $L_1,\ldots,L_4$ for each roof, the loops L_5 between two roofs, and the internal overall loop L_0 (36 in total). Regarding the loops in a first step as unconnected, the loops $L_1,\ldots,L_4$ have three, the loop L_5 has six, and the loop L_0 has 15 internal degrees of freedom, respectively (marked by "f=i" in the upper left sub-box of the loop boxes in Fig. 3). At multiple joints in which the number of incident loops is equal or larger than the number of incident bodies, couplings between the internal variables of the loops occur, corresponding to the condition that the result of the concatenation of relative motions over all incident loops is constant [2]. In the present case, joints "B" induce a coupling between loops L_0 and L_5 and the loops L_1 of two neighboring roofs, while joints A induce two couplings, one between loops L_2,L_4 and L_5, and one between loops L_3,L_4 and L_5, respectively, which interchange cyclically between the roofs. Each coupling implies that the sequence of 3D rotations is equal to the unit matrix, yielding three scalar



(a) A single "roof" (b) Subsequence of four connected roofs (c) Cycle of seven roofs

Figure 1: Connecting seven roofs with one DOF each to a cycle with 1 DOF in total

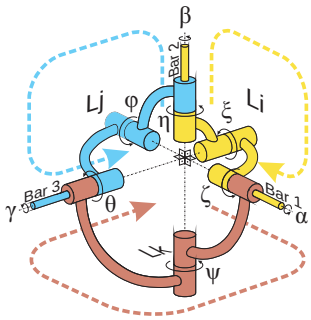


Figure 2: Loop coupling at a spherical joint

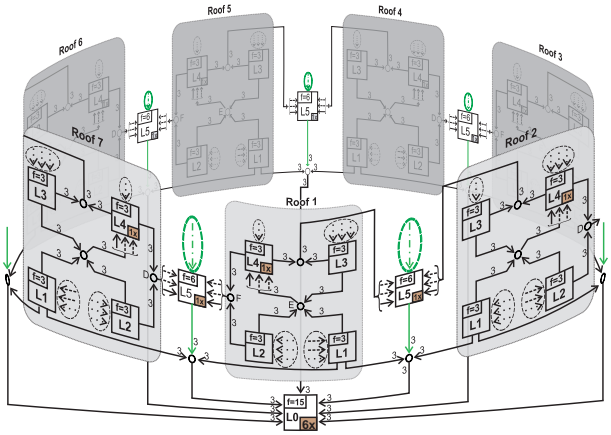


Figure 3: Kinematical network of 7-roof mechanism

constraints [4]. Putting together all loops and their couplings (shown as summing junctions), the cyclic block diagram of Fig. 3 is obtained. Note that by summing up the internal degrees of freedom of all loops and subtracting the coupling conditions (3 per summing junction) yields for the global DOF=57, which corresponds to the 56 isolated rod DOF and 1 DOF of the cycle. Thus the loop connection graph removes automatically the overall 6 rigid DOF and is isomorphic to the multibody representation.
The rest of the algorithm consists in finding proper inputs for the loops such that the local DOF of each loop is respected and that there are no closed cycles in the directed edges [2]. If this is not possible, additional (pseudo) inputs are selected at some loops from which implicit constraints result in some loops downstream (shown as "*n*x" in the lower right sub-box of the loop boxes in Fig. 1). For systems of spherical-spherical rods, there are three types of inputs: (a) "fully" isolated DOFs (dotted lines), which are immaterial and which can be removed without effect from the mechanism; (b) "transmitted" isolated DOFs (dashed lines), which have been already counted once as fully isolated in one loop and become transmitted in a neighboring loop; and "structural" isolated DOFs (dot-dashed lines), which leave adjacent subchains within a loop invariant but operate to the 'outside' of the loop as proper DOFs (here rotations about the induced edges). The difference between fully isolated and transmitted isolated DOFs can be seen from Fig. 2. Assuming that rotations of bars 1 and 2 are counted as fully isolated in loop L_i (α, β), the isolated rotation about bar 2 in loop L_j (η) is now material, and hence termed "transmitted". If loop L_j registers the rotation about bar 3 (γ) as fully isolated, than the isolated rotations about bars 1 and 3 in loop L_k (ζ, θ) are again material, and thus transmitted. Note that the third connected rotation in loop L_k (ψ) is a proper transmitted angle that in the case e.g. of a triangle loop will be subject to an implicit constraint equation. Choosing isolated DOF as inputs for loops L_1, L_2 and L_3 for each roof, yields the transmission structure displayed in Fig. 3. By removing the fully and structurally isolated DOFs and tracking only the transmitted isolated DOF (two at loop L_1 per roof) and the implicit constraint equations (14 in total within the cycle of roofs), it is detected that all loops $L_1, \ldots, L_4$ are locked, and thus that only the structural isolated DOF of rotations about the implied edges are movable, showing that the mechanism is a 7R loop. The developed methods are currently being implemented in Mathematica.

References

[1] Laman, G.: On graphs and rigidity of plane skeletal structures. Journal of Engineering Mathematics 4(4), 331–340, 1970.

[2] Kecskemethy, A. and Krupp, Th. and Hiller, M.: Symbolic processing of multiloop mechanism dynamics using closed-form kinematics solutions. Multibody System Dynamics, 23–45, 1997.

[3] Cheng J., Sitharam M. and Streinu I.: Nucleationfree 3d rigidity. In Proceedings of the 21st Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG2009), pp 71–74, 2009.

[4] Simroth, F., Ding. H. Kecskemethy, A.: A novel, loop-based approach for rigidity detection for systems with multiple spherical-spherical bars: The Double-Banana case. 5th European Conference on Mechanism Science Guimarães, Portugal, September 16-20, 2014.

Numerische Untersuchungen eines verstellbaren Gleitlagers zur Unterdrückung von Instabilitäten mittels Parameter-Antiresonanzen

Bastian Pfau, Markus Rieken, Richard Markert

Technische Universität Darmstadt, Fachgebiet Strukturdynamik, 64287 Darmstadt, Deutschland, pfau@sdy.tu-darmstadt.de

Kurzfassung

In diesem Beitrag wird ein verstellbares Gleitlager vorgestellt, welches Gleitlagerinstabilitäten in Rotorsystemen mit flexibler Welle durch Ausnutzung von Parameter-Antiresonanzen unterdrücken kann. Das Gleitlager ist als Zitronenlager in horizontaler Bauweise ausgeführt, die Verstellung erfolgt durch eine periodische Änderung des Lagerspiels bzw. des Vorbelastungsfaktors, was eine Änderung aller Steifigkeits- und Dämpfungskoeffizienten hervorruft. Durch bestimmte Wahl von Frequenz und Amplitude der Verstellbewegung kann eine Instabilität unterdrückt werden und ein Rotorsystem deutlich oberhalb der Stabilitätsgrenzdrehzahl des zeitinvarianten Systems betrieben werden. Anhand von numerischen Untersuchungen am Beispiel des LAVAL-Rotors wird aufgezeigt, dass neben den Eigenschaften der Verstellbewegung auch konstruktive Größen über das Auftreten von Parameter-Antiresonanzen entscheiden.

Abstract

In this paper an adjustable journal bearing is presented, which is capable of suppressing instabilities in rotor systems with flexible shafts with the use of parametric anti-resonances. The journal bearing is a lemon bore bearing in horizontal construction design, the adjustment is carried out by a periodic change of the bearing clearance or rather the preload factor, which leads to a change of all stiffness and damping coefficients. Choosing certain conditions for the frequency and amplitude of this adjustment, self-excited vibrations can be suppressed and the rotational speed may exceed the stability threshold of the time-invariant system without becoming unstable. Numerical investigations on a JEFFCOTT rotor show that, besides adjustment properties, also design parameters influence the existence of parametric anti-resonances.

1 Einleitung

Die destabilisierende Wirkung von Gleitlagern kann bei Rotoren mit flexibler Welle zum unbegrenzten Anwachsen der Schwingungsamplituden führen, in der Literatur ist dieses Phänomen unter dem Namen „oil-whip“ oder auch Gleitlagerinstabilität bekannt, siehe bspw. [38, 39]. Zur Vermeidung dieser Schwingungen bestehen passive Möglichkeiten, wie beispielsweise der Einsatz von Mehrflächengleitlagern oder Kippsegmentlagern, [28].

Mittlerweile existiert auch zu verstellbaren Gleitlagern vermehrt Literatur. SANTOS gibt in [34, 35] einen Überblick über den Forschungsstand von aktiven und regelbaren Gleitlagern. Viele dieser Lager arbeiten mit verschieblichen [1, 5, 37, 49, 50] oder flexiblen Segmenten [27]. Andere Konzepte arbeiten mit der Aufbringung von Kräften (magnetisch [21, 22], piezomechanisch [31, 48]) auf Lagerschale oder Lagerzapfen, ohne dabei die Lagergeometrie zu ändern. Darüber hinaus gibt es Lager, welche mit einer aktiven Öleinspritzung arbeiten, [29, 33, 35]. Zur Regelung werden in den meisten Fällen verschiedene Typen von PID-Reglern eingesetzt.

Eine Möglichkeit, die bisher nur geringfügig untersucht wurde, ist die Stabilisierung unter Ausnutzung von Parameter-Antiresonanzen. Im Gegensatz zu den hinlänglich bekannten Parameterresonanzen, bei welchen aufgrund einer Parametererregung Instabilitäten auftreten können [24], kann eine vorhandene Instabilität durch eine Parameter-Antiresonanz unterdrückt werden. Möglich wird dies durch periodisches Ändern von Steifigkeiten bzw. Steifigkeiten und Dämpfungen. Die Grundlagen hierzu wurden in den fundamentalen Werken von TONDL dargelegt, siehe auch [41, 42]. In [11] wird eine physikalische Interpretation des Effekts aufgezeigt. Zwischen den einzelnen Moden (des Systems mit konstanten Koeffizienten) findet ein Energietransfer statt. Die Energie kann hierbei von einer schwach oder gar negativ gedämpften Mode in eine Mode höherer Dämpfung transferiert und dissipiert werden.

Neben Untersuchungen an einfachen Zwei- und Dreifreiheitsgradschwingern [9, 16, 42–47] existieren auch theoretische Arbeiten zu technischen Systemen [13, 14, 17–20, 32, 47] sowie experimentelle Arbeiten [10, 12, 15, 36] .

Aufbauend auf einer Idee von CHASALEVRIS und DOHNAL, welche in [2–4] ein Lager mit einer passiven Verstellung zeigen, wird in diesem Beitrag ein Gleitlager vorgestellt, dessen Lagerschalen aktiv gegeneinander verschoben werden können. Das Lager ist in diesem Fall als Zitronenlager in horizontaler Bauweise ausgeführt, mit einer Verstellung erfolgt eine Änderung des Lagerspiels bzw. des Vorbelastungsfaktors, was eine Änderung aller Steifigkeits- und Dämpfungskoeffizienten hervorruft. Die

numerischen Untersuchungen zeigen, dass in Abhängigkeit der Variations- und Konstruktionsparameter ein erweitertes Stabilitätsgebiet entsteht, welches deutlich über die Stabilitätsgrenzdrehzahl des Systems mit konstanten Koeffizienten hinausgeht.

2 Modellierung

In diesem Kapitel wird auf das Lager- und Rotormodell sowie auf die Berechnung der Stabilität eingegangen.

2.1 Lager

Das Gleitlager ist als Mehrflächengleitlager mit translatorisch verstellbaren Gleitflächen ausgeführt. Durch die Verstellung wird Einfluss auf die Schmierspaltfunktion bzw. auf den Vorbelastungsfaktor δ genommen. Dieser beschreibt die Abweichung von einer Kreisgeometrie. Je größer δ ist, desto stärker ist die Keilform des Schmierspalts ausgeprägt. Resultierend durch die Verstellung ändern sich die Steifigkeits- und Dämpfungseigenschaften des Lagers. **Bild 1** zeigt die Schmierspaltgeometrie bei zentrischer Lage des Zapfens (Radius R_Z). Der Mittelpunkt der i-ten Schale (Radius R_S) ist um die Strecke $h_{p,i} = h_{p,i}(t)$ unter dem Winkel ψ_i vom Lagermittelpunkt versetzt. Das Lagerspiel bei zentrischer Zapfenlage h_0 sowie der Gehäuseradius R_G sind damit von der Koordinate ϑ sowie von der Zeit t abhängig.

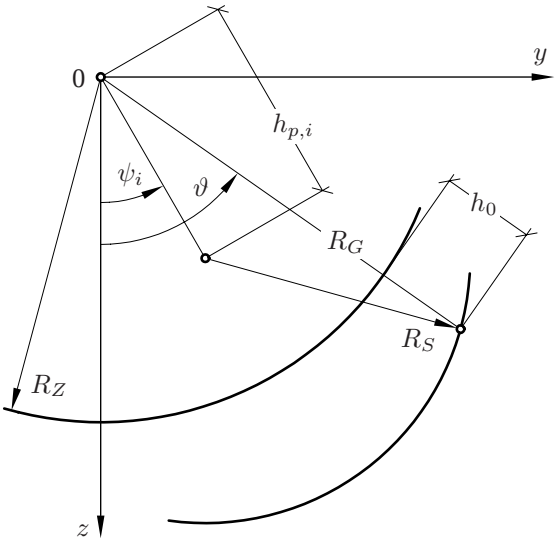


Bild 1 Schmierspalt bei zentrischer Zapfenlage

Die Schmierspaltfunktion für das i-te Segment bei zusätzlicher Auslenkung des Zapfens um die Strecke e unter dem Winkel γ lässt sich zu

$$h_i = (R_S - R_Z) - e\,\cos(\vartheta - \gamma) + h_{p,i}\,\cos(\vartheta - \psi_i) \quad (1)$$

berechnen. Der konstante Term $(R_S - R_Z)$ wird hierbei als nominales Spiel h_n bezeichnet. Eine ähnliche Darstellung ist auch in [6] zu finden.

Eine der einfachsten Bauweisen von Mehrflächengleitlagern ist das Zitronenlager, welches aus zwei gegenüberliegenden Gleitflächen besteht, siehe hierzu **Bild 2**.

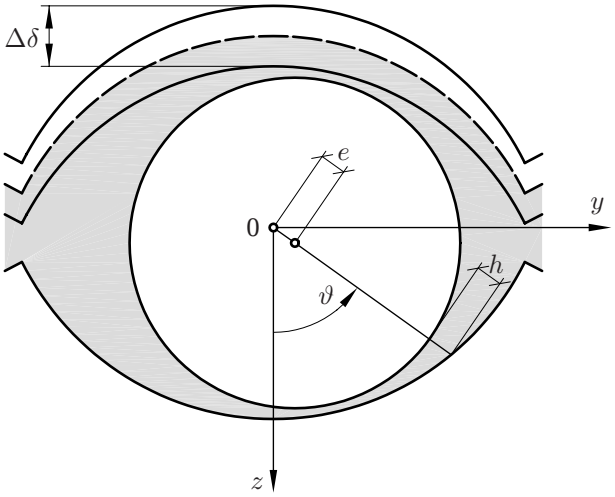


Bild 2 Zitronenlager in horizontaler Bauweise; Andeutung einer Bewegung der oberen Lagerschale mit der Variationsamplitude $\Delta\delta$

Der Vorbelastungsfaktor δ lässt sich beim Zitronenlager zu

$$\delta = \frac{1}{2\,h_n}\,(h_{p,1} + h_{p,2}) \quad (2)$$

berechnen ($\delta = 0$ entspricht dem zylindrischen Lager). Maßgeblich ist die relative Verschiebung der beiden Lagerschalen. In der Literatur lassen sich Werte für Zitronenlager im Bereich $\delta = 0{,}5 \ldots 0{,}75$ finden, s.a. [25, 40].

Die Berechnung der Lagerkräfte erfolgt für die einzelnen Lagerschalen durch numerische Integration der REYNOLDSschen Differentialgleichung der Schmierfilmtheorie, Gl. (3), s.a. [28]. Sie beschreibt die Druckverteilung $p(\vartheta, x)$ in Abhängigkeit des Schalenradius R_S, der Lagerbreite B, der Schmierspaltfunktion h sowie der Winkelgeschwindigkeit Ω und der Schmiermittelviskosität $\eta_{Öl}$,

$$\frac{1}{R_S^2}\,\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(h^3\,\frac{\partial p}{\partial\vartheta}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\,\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 6\,\eta_{Öl}\left(\Omega\,\frac{\partial h}{\partial\vartheta} + 2\,\frac{\partial h}{\partial t}\right). \quad (3)$$

Das Lösungsverfahren basiert auf einer Finite-Volumen-Methode, Details sind [30] zu entnehmen. Das Lagermodell wurde anhand numerisch [40] und experimentell ermittelter [25] Daten verifiziert.

Die beiden Terme auf der rechten Seite von Gl. (3) beschreiben den Druckaufbau durch Drehung und Verdrängung, ausgeschrieben ergeben sie sich zu

$$\Omega\,\frac{\partial h_i}{\partial\vartheta} = \Omega\,[e\,\sin(\vartheta - \gamma) - h_{p,i}\,\sin(\vartheta - \psi_i)] \quad (4)$$

und

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} = -\dot{e}\,\cos(\vartheta - \gamma) - e\,\dot{\vartheta}\,\sin(\vartheta - \gamma) + \dot{h}_{p,i}\,\cos(\vartheta - \psi_i)\,. \quad (5)$$

Der letzte Term in Gleichung (5) beschreibt einen Einfluss auf die Druckverteilung durch die Bewegung einer oder

mehrerer Lagerschalen. Bei quasistatischer Bewegung oder bei Lagern mit fixer Geometrie fällt dieser Term weg.

Im Allgemeinen hängt die Kraft, welche der Schmierfilm auf den Lagerzapfen ausübt, nichtlinear von der Lage und Geschwindigkeit des Zapfens ab, $F = F(e, \gamma, \dot{e}, \dot{\gamma})$. Sofern eine Gleichgewichtslage vorhanden ist, kann die Kraft linearisiert werden, woraus sich Feder- und Dämpfungskonstanten ergeben, s.a. Abschnitt 2.3.1.

2.2 Rotormodell und Bewegungsgleichung

Als Rotormodell wird ein LAVAL-Rotor verwendet. Er besteht aus einer runden masselosen biegeelastischen Welle (Steifigkeit k), auf die exzentrisch (Schwerpunktsexzentrizität $|\varepsilon|$) eine starre Scheibe (Masse m_S) aufgekeilt ist. Aufgrund der Gleitlagerung ist die Lagernachgiebigkeit gegenüber der Wellennachgiebigkeit nicht mehr zu vernachlässigen. Zwei massebehaftete Lagerzapfen (jeweils Masse m_Z) übertragen die Schmierfilmkräfte (F_z, F_y) auf den Rotor. Die Gewichtskräfte (F_{stat}) von Scheibe und Zapfen sorgen für die statische Last, welche die Lager zu tragen haben. Die Koordinaten von Scheibe und Zapfen sind durch w_S und v_S bzw. w_L und v_L gegeben, die Winkelgeschwindigkeit des Rotors beträgt Ω. Die Bewegungsgleichung, siehe auch [23], ist durch Gl. (6) gegeben,

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} m_S & & & \\ & m_S & & \\ & & 2m_Z & \\ & & & 2m_Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{w}_S \\ \ddot{v}_S \\ \ddot{w}_L \\ \ddot{v}_L \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} k & & -k & \\ & k & & -k \\ -k & & k & \\ & -k & & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_S \\ v_S \\ w_L \\ v_L \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} m_S\,|\varepsilon|\Omega^2\cos(\Omega t) & + & m_S\,g \\ m_S\,|\varepsilon|\Omega^2\sin(\Omega t) & & \\ -2\,F_z(w_L, v_L, \dot{w}_L, \dot{v}_L) & + & 2m_Z\,g \\ -2\,F_y(w_L, v_L, \dot{w}_L, \dot{v}_L) & & \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6}$$

Mithilfe der Bezugsfrequenz

$$\omega_0^2 = \frac{2\,F_{stat}}{h_n\,m_S} \tag{7}$$

und der biegekritischen Drehfrequenz des LAVAL-Rotors in starren Lagern

$$\omega_k^2 = \frac{k}{m_S} \tag{8}$$

lässt sich Gleichung (6) entdimensionieren und auf wenige Einflussgrößen reduzieren, welche das Betriebsverhalten beschreiben. Hierzu zählt insbesondere der Parameter

$$\kappa = \frac{(m_S + 2m_Z)\,g}{h_n}\,\frac{1}{k} = \frac{2\,F_{stat}}{h_n}\,\frac{1}{k} = \frac{\omega_0^2}{\omega_k^2}\,. \tag{9}$$

Der Parameter κ kann im weitesten Sinne als das Verhältnis der Lagersteifigkeit zur Wellensteifigkeit gedeutet werden, [51]. Geht κ gegen Null, geht das Verhalten in das eines starren Rotors über. Nimmt κ hingegen große Werte an, dominieren die Biegeschwingungen. Die Größe κ hat hierdurch einen entscheidenden Einfluss auf das Gesamtverhalten des Systems. Des Weiteren wird die auf ω_0 bezogene SOMMERFELD-Zahl eingeführt,

$$So_0 = So\,\frac{\Omega}{\omega_0} = \frac{F_{stat}\,\psi^2}{B\,D\,\eta_{Öl}\,\omega_0}\,, \tag{10}$$

welche als dimensionsloser Lastparameter zu interpretieren ist. Bei der Behandlung von Mehrflächengleitlagern wird die SOMMERFELD-Zahl oft mit dem minimalen relativen Spiel ($\psi_{min} = h_{min}/R_S$) gebildet, welches aufgrund der zeitlichen Änderung von h_{min} im vorliegenden Fall nicht zweckmäßig ist. An dieser Stelle wird hierzu der nominale Spalt h_n verwendet, $\psi = h_n/R_S$. Als weiterer konstruktiver Parameter geht noch das Verhältnis aus Lagerbreite zu -durchmesser $\beta = B/D$ ein, welches hier zu $\beta = 0{,}5$ gesetzt ist. Zuletzt fließt noch das Massenverhältnis zwischen den Lagerzapfen und der Scheibe mit in das Betriebsverhalten ein, $\mu = 2\,m_Z/m_S$. Dessen Einfluss wird im vorliegenden Beitrag jedoch nicht näher untersucht, es beträgt stets $\mu = 0{,}25$.

2.2.1 Eigenverhalten

Der Verlauf der drehzahlabhängigen Eigenfrequenzen $|\lambda_i| = \omega_i$ des Systems mit konstanten Koeffizienten ist von hoher Bedeutung, da diese über das Verhalten von Parameterresonanzen und -Antiresonanzen entscheiden. Neben der Parametererregung mit Variationsfrequenzen 1. Art,

$$\Omega_{P,1} = \frac{2\omega_i}{n} \qquad (n = 1, 2, \dots)\,, \tag{11}$$

sind Variationsfrequenzen 2. Art,

$$\Omega_{P,2}^{\pm} = \frac{|\omega_i \pm \omega_j|}{n} \qquad (n = 1, 2, \dots)\,, \tag{12}$$

in der Lage selbsterregte Schwingungen zu unterdrücken, wobei bei reiner Steifigkeitserregung jeweils ein Vorzeichen gilt. Die Bedingungen hierfür werden in [42] aufgezeigt. Liegt eine simultane Erregung von Steifigkeit und Dämpfung vor, ist die Unterdrückung für beide Vorzeichen gleichzeitig möglich, [7]. **Bilder 3 a)** und **b)** zeigen einen beispielhaften Verlauf der Eigenfrequenzen und Dämpfungsmaße (berechnet mittels Linearisierung der Gleitlagerkräfte, s.a. Abschnitt 2.3.1). Die sich stark verändernde Eigenfrequenz ω_1 ist gleitlagertypisch, in dieser Mode schwingt der Rotor nahezu starr in den Lagern, die Welle wird nur geringfügig ausgebogen. Die Biegeeigenfrequenzen entsprechen ω_2 und ω_3, sie sind durch die Nachgiebigkeit der Gleitlagerung leicht herabgesetzt. Bei Rotoren mit ausgeprägter Wellennachgiebigkeit wird eine dieser Moden bei etwa $\Omega \approx 2\,\omega_k$ instabil – es tritt Oil-Whip ein. Diese Instabilität soll mit dem verstellbaren Lager unterdrückt werden. Des Weiteren sind noch zwei weitere Eigenwerte $|\lambda_{4,8}|$ enthalten, welche bei höheren Frequenzen liegen und u.U. stark gedämpft sind.

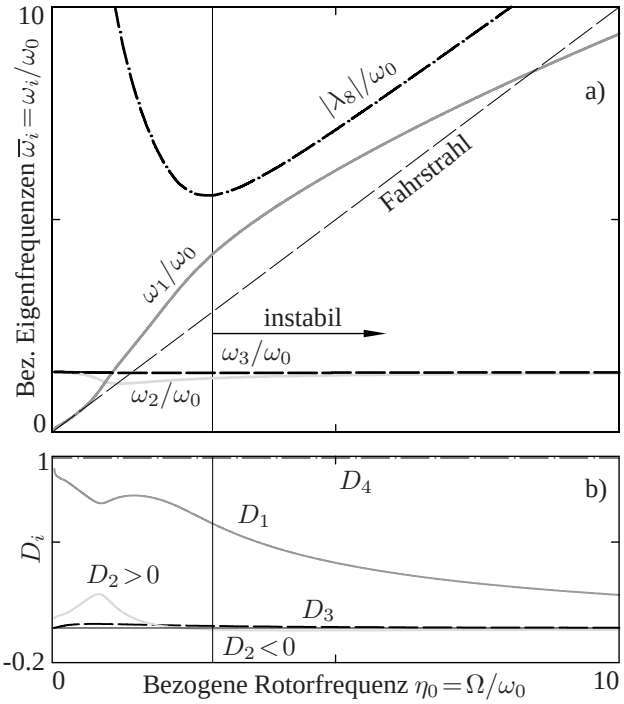


Bild 3 a) Bezogene Eigenfrequenzen $\overline{\omega}_i = \omega_i/\omega_0$ und **b)** Dämpfungsmaße $D_i = -\Re\{\lambda_i\}/|\lambda_i|$ in Abhängigkeit der Drehzahl (für die Parameter $\mu = 0{,}25$, $So_0 = 0{,}4$ und $\kappa = 0,5$)

2.3 Berechnung des Stabilitätsverhaltens

Zur Berechnung der Stabilität werden zwei Methoden herangezogen. Zunächst wird mit einem linearisierten Kraftmodell das grundsätzliche Stabilitätsverhalten in Abhängigkeit von Variationsfrequenz und -amplitude sowie konstruktiven Größen untersucht. Dieses Verfahren hat den Vorteil einer schnellen Berechnung und damit die Möglichkeit zum Durchführen von Parameterstudien, jedoch sind bestimmte Vereinfachungen zu treffen. Mittels eines nichtlinearen Kraftmodells durch vollständige Lösung von Geichung (3) werden einzelne Punkte der linearen Rechnungen überprüft. Zudem lässt sich hier der zeitliche Verlauf der Zustandsgrößen analysieren.
Beiden Verfahren ist gleich, dass der Vorbelastungsfaktor δ mit der Kreisfrequenz Ω_P harmonisch verändert wird,

$$\delta(t) = \delta_{mittel} + \Delta\delta \, \sin(\Omega_P t) \, . \tag{13}$$

Der mittlere Vorbelastungsfaktor ist bei allen Simulation zu $\delta_{mittel} = 0{,}65$ gewählt worden. In diesem Bereich ist die Änderung der Lagerkoeffizienten $\partial k_{ij}/\partial\delta$ bzw. $\partial b_{ij}/\partial\delta$ vergleichsweise hoch, so dass mit einer geringen Amplitude $\Delta\delta$ eine hohe Änderung von Steifigkeiten und Dämpfungen erzielt werden kann.

2.3.1 Berechnung mit Gleitlagerkoeffizienten

Führt der Lagerzapfen nur kleine Schwingungen um seine Gleichgewichtslage aus, darf das Kraftgesetz linearisiert werden und man erhält Gleichung (14),

$$\begin{bmatrix} \Delta F_z \\ \Delta F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{zz} & b_{zy} \\ b_{yz} & b_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\dot{w}_L \\ \Delta\dot{v}_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{zz} & k_{zy} \\ k_{yz} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta w_L \\ \Delta v_L \end{bmatrix} . \tag{14}$$

Durch die harmonische Änderung des Vorbelastungsfaktors δ ändern sich sowohl die Steifigkeitsmatrix

$$\boldsymbol{K}_L(t) = \boldsymbol{K}_L(t+T) \tag{15}$$

als auch die Dämpfungsmatrix

$$\boldsymbol{B}_L(t) = \boldsymbol{B}_L(t+T) \tag{16}$$

mit der Periodendauer T. Es sei angenommen, dass die Schalenbewegung quasistatisch ist, d.h. ein dadurch entstehender Druckanteil vernachlässigt wird. Aufgrund des nichtlinearen Verlaufs der Steifigkeits- und Dämpfungskoeffizienten in Abhängigkeit von δ sind die zeitlichen Verläufe i.A. nicht harmonisch, jedoch periodisch. Die Koeffizienten ändern sich hierbei nicht mit gleicher Amplitude, die betragsmäßig größten Änderungen liegen in Richtung des minimalen Spiels vor (k_{zz} und b_{zz}). Da die Koeffizienten nicht zu beliebigen Vorbelastungsfaktoren vorliegen, werden sie in der Simulation innerhalb bekannter Werte linear interpoliert.

Es konnte bereits gezeigt werden, dass sich die gleichzeitige Änderung von Steifigkeits- und Dämpfungseigenschaften positiv auf die Ausprägung von Parameter-Antiresonanzen auswirken kann, [7]. Diese Eigenschaft bringt das vorliegende System von sich aus mit.

Mit dem linearisierten Kraftgesetz lassen sich die Lagerkräfte auf die linke Seite von Gleichung (6) bringen, so dass ein lineares parametererregtes System vorliegt. Die Stabilität eines solchen Systems lässt sich mit Hilfe der FLOQUET-Theorie berechnen, siehe hierzu auch [24, 26]. Sie liefert alleinig eine Aussage über die Stabilität, jedoch nicht über den Verlauf der freien Schwingungen.

Liegen die konstruktiven Parameter des Rotorsystems (κ, So_0, β, μ) fest, stellt sich die Frage, mit welcher Amplitude und Frequenz der Vorbelastungsfaktor geändert werden muss, dass bei einer bestimmten Rotordrehzahl noch Stabilität herrscht.

2.3.2 Berechnung mit nichtlinearem Kraftmodell

Die Berechnung mit linearisiertem Kraftgesetz erfordert viele Vereinfachungen. Löst man die Bewegungsgleichung (3) ohne Linearisierung, müssen keine Annahmen an kleine Schwingungen gestellt werden, sondern der Zapfen kann sich beliebig im Lager bewegen. Zudem wird der Druckanteil durch die Schalenbewegung berücksichtigt. Weiterhin kann auch noch eine Massenexzentrizität $|\varepsilon|$ zugelassen werden. Ein großer Vorteil dieser Berechnungsmethode ist die Analyse der Zeitsignale, nachteilig ist der hohe Berechnungsaufwand.

Ob ein stabiler oder instabiler Bewegungszustand vorliegt, lässt sich bereits am Verlauf der Scheibenauslenkung

$$|r_S| = \sqrt{w_S^2 + v_S^2} \tag{17}$$

feststellen. Bei Eintritt des Oil-Whip wachsen die Amplituden unbegrenzt an, [38]. Ist die Bewegung stabil, erfolgt kein Aufklingen der freien Schwingungen. Setzt man als Anfangsbedingung einen hypothetischen Bewegungszustand an, bei welchem zwangsläufig freie Schwingungen auftreten, ist dieser Sachverhalt gut zu erkennen.

3 Ergebnisse

Die Präsentation der Berechnungsergebnisse gliedert sich in zwei Teile, basierend auf linearem und nichtlinearem Kraftmodell. Mit ersterem kann das grundsätzliche Stabilitätsverhalten studiert werden, letzteres dient zur Überprüfung einzelner Punkte der linearen Rechnung.

3.1 Lineare Berechnung

Wie eingangs erwähnt, hängt das Stabilitätsverhalten grundsätzlich von Variationsfrequenz und -amplitude ab. **Bild 4 a)** zeigt eine beispielhafte Stabilitätskarte, hierbei sind die stabilen Betriebspunkte in Abhängigkeit von Rotor- und Variationsfrequenz bei konstanter Variatationsamplitude aufgetragen. Eine Variationsfrequenz von Null entspricht dem System mit konstanten Koeffizienten, dessen Stabilitätsgrenze hier bei $\eta_0 \approx 2$ liegt. Oberhalb dieser Grenze entsteht durch die Parametererregung ein erweitertes Stabilitätsgebiet, welches in der Umgebung der Kombinationsfrequenzen beider Vorzeichentypen liegt, $|\omega_1 - \omega_{2,3}|$ und $\omega_1 + \omega_{2,3}$. Des Weiteren existiert ein Stabilitätsgebiet zweiter Ordnung, welches allerdings erst bei höheren Drehzahlen auftritt. Aufgrund dieses Sachverhalts wird die These aufgestellt, dass diese Schwingungsmoden hauptverantwortlich für das erweiterte Stabilitätsgebiet sind. Die i.d.R. gut gedämpfte gleitlagertypische Mode 1 ist durch die Modenkopplung in der Lage, den Einfluss der negativen Dämpfung von Mode 2 auszugleichen, was zur vollständigen Unterdrückung der Instabilität führt. In **Bild 4 b)** sind die benötigten Erregeramplituden $\Delta\delta$ in Abhängigkeit der Rotorfrequenz aufgetragen, wobei die stabilen Punkte hier für alle Variationsfrequenzen gezeigt sind. Zwischen der Stabilitätsgrenzdrehzahl des Systems mit konstanten Koeffizienten und dem erweiterten Stabilitätsgebiet kann je nach gewählter Erregeramplitude ein Bereich auftreten, in welchem kein stabiler Betrieb möglich ist. Je höher die Erregeramplitude ist, desto kleiner wird dieses Gebiet. Das ein Mindestmaß für die Erregeramplitude vorliegen muss damit Stabilität gewährleistet ist, wird z.B. in [8] aufgezeigt. Weiterhin hier wird dargelegt, dass bei Überschreitung einer bestimmten Amplitude die Dämpfung nicht weiter zunimmt.

Das erweiterte Stabilitätsgebiet ist zu höheren Frequenzen hin begrenzt, da auch das Dämpfungsmaß von Schwingungsmode 1 negativ wird und die Unterdrückung der Instabilität nicht mehr möglich ist. Bis zu dieser Grenze kann der Rotor bei Drehzahlen, welche deutlich höher sind als die Stabilitätsgrenzdrehzahl des Systems mit konstanten Koeffizienten (d.h. mit dem Lager mit starrer Geometrie), betrieben werden.

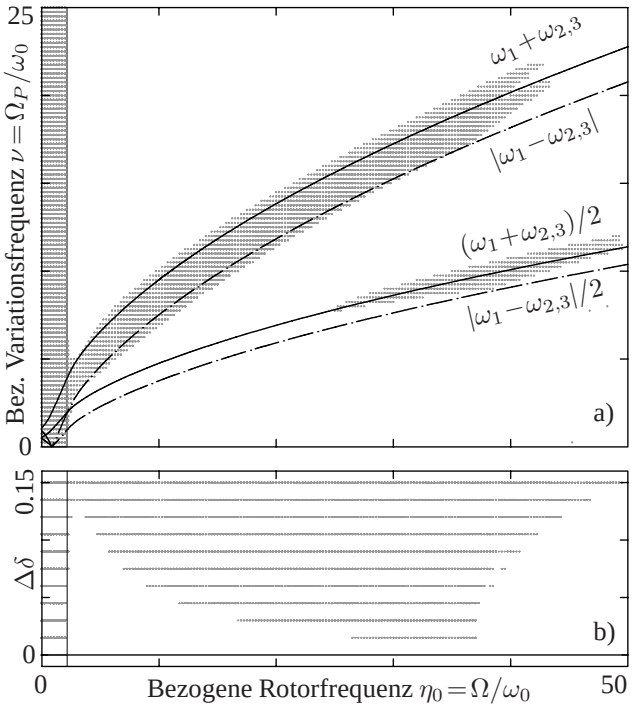


Bild 4 **a)** stabile Betriebspunkte bei konstanter Variationsamplitude $\Delta\delta = 0.15$; **b)** Notwendige Variationsamplitude $\Delta\delta$ für sämtliche Variationsfrequenzen (Parameter $\mu = 0{,}25$, $So_0 = 0{,}5$ und $\kappa = 1$)

Bilder 4 a) und b) ergeben zusammen für alle Variationsfrequenzen und -amplituden ein dreidimensionales Gebilde, siehe hierzu **Bild 5)**. Es ist nochmals zu erkennen, dass die Stabilitätsgebiete nicht für alle Varationsamplitden durchgängig sind. Weiterhin sieht man, dass die Stabilitätsgebiete höherer Ordnung praktisch nur für hohe Variationsamplituden existieren.

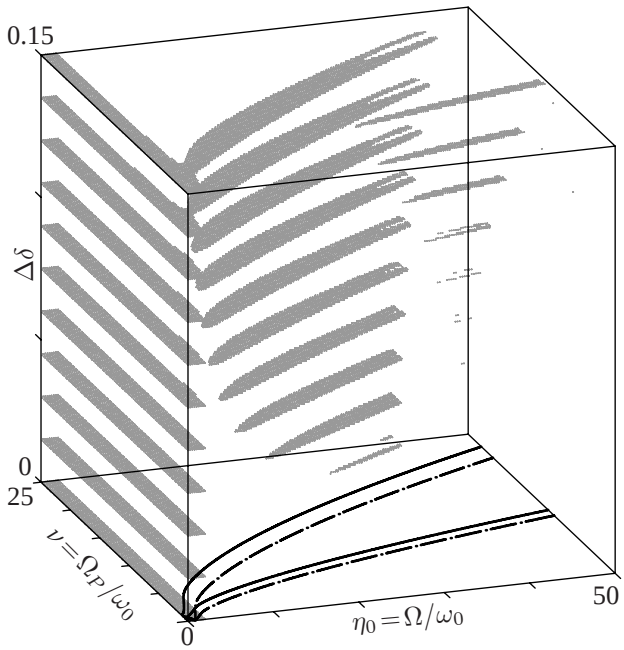


Bild 5 Stabile Betriebspunkte in Abhängigkeit von Variationsfrequenz und -amplitude (Parameter $\mu = 0{,}25$, $So_0 = 0{,}5$ und $\kappa = 1$)

Neben den Eigenschaften der Parametererregung entscheiden auch die konstruktiven Parameter So_0 und κ maßgeblich über Auftreten und Ausprägung des erweiterten Stabilitätsgebiets. Für $So_0 =$ konst. verändert sich die grundsätzliche Lage der Variationsfrequenzen in Abhänigkeit von κ nicht, die Breite des erweiterten Stabilitätsgebiets wird jedoch für höhere Werte von κ eingeschnürt. Ist der Parameter κ zu groß, sind die Lager gegenüber der Welle nahezu starr und die dämpfende Wirkung des Lagers kann nicht optimal ausgenutzt werden. Dies äußert sich zunächst damit, dass das Stabilitätsgebiet auch bei hohen Erregeramplituden nicht mehr durchgängig ist, so wie es auch in den Bildern 4 b) und 5 zu sehen ist. Die Steigung des erweiterten Stabilitätsgebiets geht einher mit dem Verlauf der Eigenfrequenz ($\partial\omega_1/\partial\eta_0$) bzw. der SOMMERFELD-Zahl So_0. Je höher So_0, desto flacher der Verlauf des Stabilitätsgebiets.

3.2 Nichtlineare Berechnung

Wie bereits in Abschnitt 2.3.2 erwähnt wurde, stellt die Berechnung mit linearisiertem Kraftmodell viele Vereinfachungen an die Berechnung und schränkt die Analyse der Ergebnisse ein. Aus diesem Grund sind beispielhaft an dieser Stelle für zwei Punkte aus Bild 4 die Berechnungsergebnisse mit nichtlinearem Kraftmodell gezeigt.

Als Anfangsbedingung für Gleichung (6) wird der Rotor mit ausgebogener Welle – dies entspricht in etwa der Eigenform der instabilen Mode 2 – sich selbst überlassen. Der Anfangszustand ist zwar hypothetisch, jedoch lässt sich das Verhalten der freien Schwingungen gut analysieren. Die bezogene Drehzahl beträgt in beiden Fällen $\eta_0 = 10$. Die Variationsfrequenzen werden zu $\nu = 8$ (erwartete Stabilität) und $\nu = 4$ (erwartete Instabilität) gewählt. Eine Massenexzentrizität der Scheibe wird nicht berücksichtigt, $|\varepsilon| = 0$.

Als Beispiel für einen stabilen Betriebspunkt ist in **Bild 6 a)** der zeitliche Verlauf der Scheibenauslenkung $|r_S|$ gezeigt. Die Schwingung klingt mit der Eigenfrequenz ω_k ab, es verbleibt lediglich ein geringer Anteil mit der Variationsfrequenz Ω_P, welcher um die Endlage schwankt. Hierbei spielt es für die Stabilität keine Rolle, ob beide Lagerschalen gleichzeitig mit der Amplitude $\Delta\delta$ oder die obere Lagerschale mit $2\Delta\delta$ bewegt wird, was technisch einfacher zu realisieren ist. Je nach Umsetzung ergeben sich jedoch verschiedene Orbits der Zapfenbewegung.

Mithilfe des Arbeitssatzes der Mechanik,

$$W^* = T + U - (T_0 + U_0)\,, \tag{18}$$

lässt sich die zeitliche Änderung des Energieinhalts des Systems studieren. Die kinetische Energie T besteht hier aus den Anteilen der zwei Zapfen- sowie der Scheibenmasse, die potentielle Energie U enthält die Verformungsenergie der Welle sowie das Potential der Gewichtskräfte. Die Arbeit der nichtkonservativen Kräfte W^* zwischen Simulationsbeginn ($t = 0$) und einem beliebigen Zeitpunkt wird lediglich von den Lagerkräften F_z und F_y verrichtet. In **Bild 6 b)** ist zu sehen, dass zu Simulationsbeginn dem System zwar kurzzeitig Energie zugeführt wird, jedoch in der Folge umso mehr entzogen wird. Die zu Beginn enthaltene potentielle Energie durch die Ausbiegung der Welle wird nahezu vollständig abgebaut. Der Energieinhalt des Systems stellt sich auf einem gleichbleibenden Niveau ein.

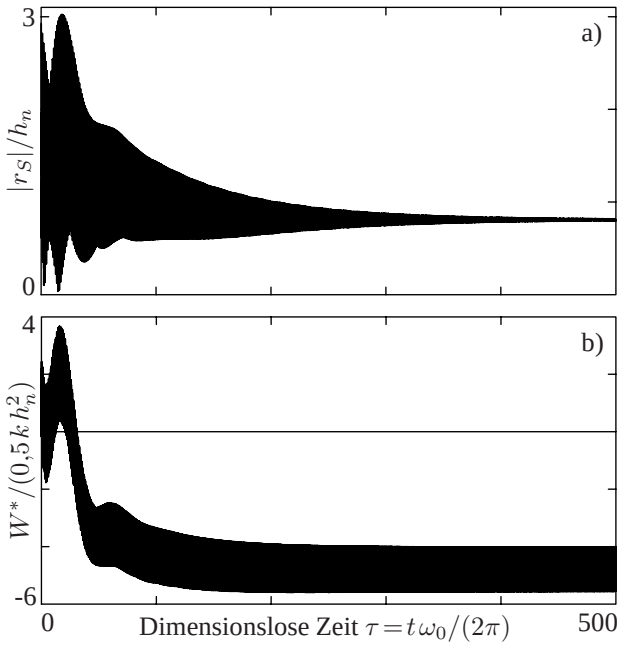


Bild 6 Beispielhafter Verlauf der **a)** Scheibenbewegung $|r_S|/h_n$ sowie der **b)** verrichteten Arbeit der Lagerkräfte $W^*/(0{,}5\,k\,h_n^2)$ für einen stabilen Betriebspunkt ($\eta_0 = 10$, $\nu = 8$, Parameter $\mu = 0{,}25$, $So_0 = 0{,}5$ und $\kappa = 1$)

In **Bild 7 a)** wird er Fall eines instabilen Betriebspunktes betrachtet. Die Auslenkung der Scheibe $|r_S|$ wächst mit der Frequenz ω_k über alle Grenzen. Der Orbit der Bewegung ist hierbei ellipsenförmig.

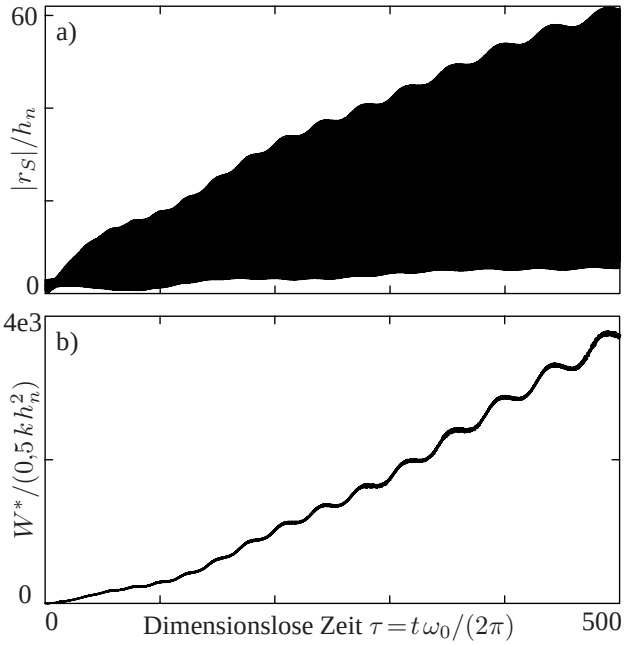


Bild 7 Beispielhafter Verlauf der **a)** Scheibenbewegung $|r_S|/h_n$ sowie der **b)** verrichteten Arbeit der Lagerkräfte $W^*/(0{,}5\ k\ h_n^2)$ für einen instabilen Betriebspunkt ($\eta_0 = 10$, $\nu = 4$, Parameter $\mu = 0{,}25$, $So_0 = 0{,}5$ und $\kappa = 1$)

Zu erwähnen ist, dass bei Wahl der Variationsfrequenz in einer Parameterresonanz die Schwingungen noch schneller aufklingen können, als sie es ohne Parametererregung ($\Delta\delta = 0$) tun würden. Auch an der Arbeit der Lagerkräfte W^*, **Bild 7 b)**, ist ersichtlich, dass dem System stets Energie zugeführt wird. Ein Betrieb eines Rotorsystems in diesem Zustand ist nicht zulässig.

4 Zusammenfassung

Die numerischen Untersuchungen im vorliegenden Beitrag zeigen, dass es mit Hilfe eines verstellbaren Gleitlagers möglich ist, die durch den Fluidfilm induzierten Instabilitäten zu unterdrücken. Simulation unter Nutzung eines linearisierten Kraftmodells zeigen das grundsätzliche Stabilitätsverhalten auf. Die Stabilisierung erfolgt bei Variationsfrequenzen in Umgebung der Kombinationsfrequenzen der gleitlagertypischen und der biegekritischen Mode, jeweils unter Einhaltung einer bestimmten drehzahlabhängigen Erregeramplitude. Die Steifigkeit des Lagers darf im Gegensatz zur Steifigkeit der Welle nicht zu hoch sein, um den Effekt ausnutzen zu können. Untersuchungen mit einem nichtlinearen Kraftmodell bestätigen einzelne Punkte der linearen Rechnungen und zeigen zudem den zeitlichen Verlauf der Schwingungen sowie einen Energieeintrag bzw. -entnahme des Systems. Es ist anzumerken, dass diese Art der Schwingungsreduzierung durch Ausnutzen der bereits vorhandenen Systemdämpfung und ohne einen geschlossenen Regelkreis auskommt.

Für die Zukunft sind verschiedene Untersuchungen analytischer, numerischer und experimenteller Art geplant. Mit Hilfe analytischer Näherungsmethoden ist das Verhalten über das Auftreten der Parameter-Antiresonanzen zu untersuchen, um ein besseres Verständnis über das System zu erhalten. Weiterhin steht noch die Frage offen, wie der Energietransfer im System geschieht, insbesondere welche Schwingungsmoden wie stark daran beteiligt sind. Nicht zuletzt müssen experimentelle Untersuchungen belegen, ob der Effekt der Paramter-Antiresonanz auch wie berechnet eintritt.

5 Danksagung

Ein besonderer Dank gilt Athanasios CHASALEVRIS und Fadi DOHNAL für die wertvolle Vorarbeit und die konstruktiven Diskussionen.

6 Literatur

[1] ALTHAUS, Josef: *Eine aktive hydraulische Lagerung für Rotorsysteme*, Technische Universität München, Fortschritt-Berichte VDI Reihe 11 Nr. 154, VDI-Verlag, 1991

[2] CHASALEVRIS, A. ; DOHNAL, F.: Vibration quenching in a large scale rotor-bearing system using journal bearings with variable geometry. In: *Journal of Sound and Vibration* 333 (2014), S. 2087–2099

[3] CHASALEVRIS, A. ; DOHNAL, F.: A journal bearing with variable geometry for the suppression of vibrations in rotating shafts: Simulation, design, construction and experiment. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 52-53 (2015), S. 506–528

[4] CHASALEVRIS, Athanasios ; DOHNAL, Fadi: A Journal Bearing With Variable Geometry for the Reduction of the Maximum Amplitude During Passage Through Resonance. In: *Journal of Vibration and Acoustics* 134 (2012), S. 061005–1–061005–8

[5] DECKLER, D. C. ; VEILLETTE, R. J. ; BRAUN, M. J. ; CHOY, F. K.: Simulation and Control of an Active Tilting-Pad Journal Bearing. In: *Tribology Transactions* 47 (2004), Nr. 3, S. 440–458

[6] DIN DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG E.V., NORMENAUSSCHUSS GLEITLAGER (NGL): *DIN 31657-1 Hydrodynamische Radial-Gleitlager im stationären Betrieb, Teil 1: Berechnung von Mehrflächen- und Kippsegmentlagern*. März 1996

[7] DOHNAL, F.: Suppressing self-excited vibrations by synchronous and time-periodic stiffness and damping variation. In: *Journal of Sound and Vibration* 306 (2007), S. 136–152

[8] DOHNAL, F.: Damping by Parametric Stiffness Excitation: Resonance and Anti-Resonance. In: *Journal of Vibration and Control* 14(5) (2008), S. 669–688

[9] DOHNAL, F.: General parametric stiffness excitation – anti-resonance frequency and symmetry. In: *Acta Mechanica* 196 (2008), S. 15–31

[10] DOHNAL, F.: *A contribution to the mitigation of transient vibrations, Parametric anti-resonance: theory, experiment and interpretation*, Technische Universität Darmstadt, Habilitationsschrift, 2012

[11] DOHNAL, F.: Dissipative Energy Flow in Systems at Parametric Anti-Resonance. In: *Proceedings of the 24th ASME Conference on Mechanical Vibration and Noise*, 2012

[12] DOHNAL, F.: Experimental studies on damping by parametric excitation using electromagnets. In: *Journal of Mechanical Engineering Science* 226(8) (2012), S. 2015–2027

[13] DOHNAL, F. ; ECKER, H. ; SPRINGER, H.: Enhanced damping of a cantilever beam by axial parametric excitation. In: *Archive of Applied Mechanics* 78 (2008), S. 935–947

[14] DOHNAL, F. ; MACE, B. R.: Damping of a flexible rotor by time-periodic stiffness and damping variation. In: *Ninth International Conference on Vibrations in Rotating Machinery*, 2008

[15] DOHNAL, F. ; MARKERT, R.: Enhancement of External Damping of a Flexible Rotor in Active Magnetic Bearings by Time-Periodic Stiffness Variation. In: *Journal of System and Dynamics* 5(5) (2011), S. 856–865

[16] ECKER, H.: Parametric Stiffness Excitation as a Means for Vibration Suppression. In: *ICOVP Vibration Problems*, 2005

[17] ECKER, H.: Parametric Excitation in Engineering

Systems. In: *Proceedings of COBEM*, 2009

[18] ECKER, H. ; PUMHÖSSEL, T.: Vibration suppression and energy transfer by parametric excitation in drive systems. In: *Journal of Mechanical Engineering Science* 226 (2012), S. 2000–2014

[19] ECKER, H. ; PUMHÖSSEL, T. ; TONDL, A.: A study on parametric excitation for suppressing self-excited rotor vibrations. In: *6th IFToMM-Conference on Rotor Dynamics*, 2002

[20] ECKER, H. ; TONDL, A.: Increasing the Stability Threshold of a Rotor by Open-Loop Control of the Bearing Mount Stiffness. In: *The Third International Symposium On Stability Control Of Rotating Machinery*, 2005

[21] EL-SHAFEI, A. ; DIMITRI, A. S.: Controlling Journal Bearing Instability Using Active Magnetic Bearings. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 132(1) (2010), S. 012502–012502–9

[22] FÜRST, S. ; ULBRICH, H.: An active support system for rotors with oil-film bearings. In: *Proceedings of the 4th International Conference on Vibrations in Rotating Machinery of the Institution of Mechanical Engineers*. Edinburgh, UK, 1988, S. 61–68

[23] GASCH, R. ; NORDMANN, R. ; PFÜTZNER, H.: *Rotordynamik*. Springer-Verlag, 2001

[24] GASCH, Robert ; KNOTHE, Klaus: *Strukturdynamik - Diskrete Systeme und Kontinua*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012

[25] GLIENICKE, J.: *Feder- und Dämpfungskonstanten von Gleitlagern für Turbomaschinen und deren Einfluß auf das Schwingungsverhalten eines einfachen Rotors*, Technische Hochschule Karlsruhe, Diss., 1966

[26] HAGEDORN, Peter: *Non-Linear Oscillations - Second Edition*. Oxford University Press, 1988

[27] KRODKIEWSKI, J. M. ; CEN, Y. ; SUN, L.: Improvement of Stability of Rotor System by Introducing a Hydraulic Damper into an Active Journal Bearing. In: *International Journal of Rotating Machinery* 3 (1997), Nr. 1, S. 45–52

[28] LANG, O.R. ; STEINHILPER, W.: *Gleitlager – Berechnung und Konstruktion von Gleitlagern mit konstanter und zeitlich veränderlicher Belastung (Konstruktionsbücher Band 31)*. Springer-Verlag, 1978

[29] NICOLETTI, R. ; SANTOS, I. F.: Linear and nonlinear control techniques applied to actively lubricated journal bearings. In: *Journal of Sound and Vibration* 260 (2003), S. 927–947

[30] PFAU, Bastian: *Numerische Untersuchung eines Rotors in Schwimmbuchsenlagern*, Technische Universität Darmstadt, Masterthesis, 2012

[31] PRZYBYLOWICZ, Piotr: Active Stabilisation of a Rigid Rotor by a Piezoelectrically Controlled Mobile Journal Bearing System. In: *Australian Journal of Mechanical Engineering* 1(2) (2004), S. 123–128

[32] PUMHÖSSEL, T. ; ECKER, H. ; TONDL, A.: Zum Einfluss einer periodischen axialen Kraft auf die lateralen Schwingungen eines Laval-Rotors. In: *9. Internationale Tagung Schwingungen in rotierenden Maschinen (SIRM)*, 2009

[33] SANTOS, I. F. ; SCALABRIN, A.: Control System Design for Active Lubrication With Theoretical and Experimental Examples. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 125 (2003), S. 75–80

[34] SANTOS, Ilmar F.: Trends in Controllable Oil Film Bearings. In: *Proceedings of the IUTAM Symposium on Emerging Trends in Rotor Dynamics*. New Delhi, India, Mõrz 2009, S. 185–199

[35] SANTOS, Ilmar F.: On the future of controllable fluid film bearings. In: *Mécanique & Industries* 12 (2011), S. 275–281

[36] SCHMIDT, E. ; PARADEISER, W. ; DOHNAL, F. ; ECKER, H.: Design of an electromagnetic actuator for parametric stiffness excitation. In: *The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering* 26(3) (2007), S. 800–813

[37] SHENOY, Satish B. ; PAI, Raghuvir: Steady State Performance Characteristics of a Single Pad Externally Adjustable Fluid Film Bearing. In: *Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing* 5 (2008), Nr. 2, S. 937–948

[38] SOMEYA, T.: *Stabilität einer in zylindrischen Gleitlagern laufenden, unwuchtfreien Welle*, Technische Hochschule Karlsruhe, Diss., 1962

[39] SOMEYA, T.: Schwingungs- und Stabilitätsverhalten einer in zylindrischen Gleitlagern laufenden Welle mit Unwucht / VDI-Verlag Düsseldorf. 1965. – VDI-Forschungsheft 510

[40] SOMEYA, T.: *Journal-Bearing Databook*. Springer-Verlag, 1989

[41] TONDL, A.: *On the interaction between self-excited and parametric vibrations*. Monographs and Memoranda No. 25, National Research Institute for Machine Design, Běchovice, 1978

[42] TONDL, A.: To the Problem of Quenching Self-Excited Vibrations. In: *Acta Techn. CSAV* 43 (1998), S. 109–116

[43] TONDL, A.: Analysis of a self-excited two-mass system. In: *Journal of Mechanical Engineering* 59(3) (2008), S. 115–124

[44] TONDL, A.: Passive and Active Means for Self-Excited Vibration Suppressing: Two-Mass Model. In: *Engineering MECHANICS* 2 (2008), S. 133–138

[45] TONDL, A.: To The Problem of Self-Excited Vibration Suppression. In: *Engineering MECHANICS* 15 (2008), S. 297–307

[46] TONDL, A. ; ECKER, H.: On the problem of self-excited vibration quenching by means of parametric excitation. In: *Archive of Applied Mechanics* 72 (2003), S. 923–932

[47] TONDL, A. ; NABERGOJ, R.: The effect of parame-

tric excitation on a self-excited three-mass system. In: *International Journal of Non-Linear Mechanics* 39 (2004), S. 821–832

[48] TÚMA, J. ; ŠIMEK, J. ; ŠKUTA, J. ; LOS, J.: Active vibrations control of journal bearings with the use of piezoactuators. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 36 (2013), S. 618–629

[49] ULBRICH, H. ; ALTHAUS, J.: Actuator Design for rotor control. In: *12th Biennial ASME Conference on Vibration and Noise*. Montreal, Quebec, Canada, September 1989, S. 17–22

[50] WU, An ; DE QUEIROZ, Marcio: A New Active Tilting-Pad Bearing: Nonlinear Modeling and Feedback Control. In: *Tribology Transactions* 53 (2010), Nr. 5, S. 755–763

[51] WUTSDORFF, Peter: Stabilitätsuntersuchungen an einem Kühlgasradialgebläse. In: *Irretier, H.; Nordmann, R.; Springer, H.: Schwingungen in rotierenden Maschinen. SIRM-Tagung*, Vieweg, 1995

Nachgiebige Koppelmechanismen mit optimierten Festkörpergelenken für Präzisionsanwendungen
Compliant linkage mechanisms with optimized flexure hinges for precision applications

Sebastian Linß[*], Ronald Opfermann[*], Philipp Gräser[#], René Theska[#], Lena Zentner[*]
Technische Universität Ilmenau, Fakultät für Maschinenbau, 98693 Ilmenau, Deutschland
[*]Fachgebiet Mechanismentechnik: sebastian.linss@tu-ilmenau.de, lena.zentner@tu-ilmenau.de
[#]Fachgebiet Feinwerktechnik: philipp.graeser@tu-ilmenau.de, rene.theska@tu-ilmenau.de

Kurzfassung

Festkörpergelenke werden aufgrund ihrer Vorteile als stoffgekoppelte Drehgelenke in nachgiebigen Koppelmechanismen eingesetzt. Für Präzisionsanwendungen kommen überwiegend prismatische Festkörpergelenke mit elementaren geometrischen Aussparungen zum Einsatz. Eine wesentliche Phase bei der Synthese eines nachgiebigen Koppelmechanismus ist die in diesem Beitrag untersuchte geometrische Gestaltung und Optimierung der prismatischen Festkörpergelenke hinsichtlich geforderter Mechanismuseigenschaften. Hierzu zählt neben dem Bewegungsbereich v. a. die Bahngenauigkeit im Vergleich mit dem zugrunde liegenden Starrkörpermechanismus. In diesem Zusammenhang wird die FEM-basierte Konturoptimierung im nachgiebigen Mechanismus auf der Basis von Polynomkonturen untersucht. Beispielhaft werden zwei Mechanismen zur Realisierung einer Punktgeradführung betrachtet. Die Ergebnisse der mehrkriteriellen Optimierung werden am Beispiel einer nachgiebigen Schubkurbel messtechnisch überprüft. Abschließend wird ein Ansatz für die Mechanismussynthese abgeleitet.

Abstract

Due to their advantages, flexure hinges are used as materially-coherent revolute joints in compliant linkage mechanisms. In the case of precision applications prismatic flexure hinges with elementary cut-out geometries are state of the art. Regarding the required mechanism properties, the phase of the geometric design of the prismatic flexure hinges is a key aspect in the synthesis of a compliant linkage mechanism, which is investigated in this contribution. In addition to the motion range, this includes particularly the path accuracy compared to the rigid-body mechanism. In this context, the FEM-based contour optimization within the compliant mechanism is investigated using polynomial contours. Therefore, two mechanisms for the realization of a rectilinear guiding of a coupler point are used as examples. The results of the compliant slider-crank mechanism are verified by measurement. Finally, an approach for the mechanism synthesis is proposed.

1 Einleitung

Zur Realisierung von Bewegungen mit hohen Anforderungen an die Präzision werden Starrkörpermechanismen häufig durch nachgiebige Mechanismen ersetzt [1, 2]. Infolge des monolithischen Aufbaus ermöglichen nachgiebige Mechanismen eine hochreproduzierbare Bewegung ohne Spiel, Reibung und Verschleiß. In Mechanismen mit konzentrierter Nachgiebigkeitsverteilung [3] kann die Beweglichkeit mithilfe verschiedener Festkörpergelenke realisiert werden (siehe **Bild 1**). In nachgiebigen Koppelmechanismen kommen vorwiegend stoffgekoppelte Drehgelenke mit unterschiedlichem Freiheitsgrad zum Einsatz (**Bild 2**).

Der Auslenkwinkel dieser Festkörpergelenke ist durch die zulässige Dehnung auf wenige Grad begrenzt. Weiterhin findet während der Auslenkung grundsätzlich eine Verlagerung der Gelenkdrehachse statt [4], wodurch auch das Bewegungsverhalten des gesamten Mechanismus beeinflusst wird [5]. Somit ergeben sich für den nachgiebigen Mechanismus Limitierungen hinsichtlich des Bewegungsbereiches und der Bahngenauigkeit im Vergleich zum Starrkörpermechanismus. Zusätzlich liegen bei der Entwicklung von Präzisionssystemen der Mikro-, Feinwerk- und Messtechnik oftmals Anforderungen an die erreichbare Positionierauflösung und -wiederholgenauigkeit im Mikro- oder Nanometerbereich vor [6].

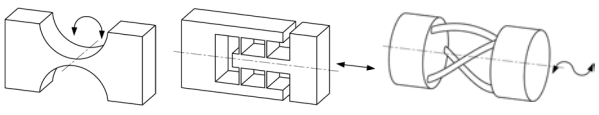


Bild 1 Einteilung von Festkörpergelenken anhand der Form der relativen Bewegung: (a) Drehgelenk, (b) Schubgelenk, (c) Schraubgelenk

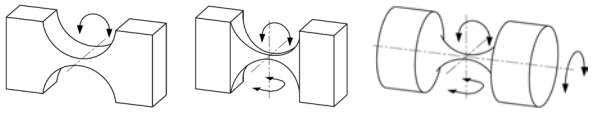


Bild 2 Einteilung von Festkörpergelenken für rotatorische Bewegungen anhand des idealisierten Gelenkfreiheitsgrades *f*: (a) $f = 1$, (b) $f = 2$, (c) $f = 3$

Für separate Festkörpergelenke existieren daher Untersuchungen zur Vergrößerung des Auslenkwinkels durch Reduzierung der Maximaldehnung und der gleichzeitigen Verringerung der Drehachsenverlagerung. Dadurch entstehen zunehmend komplexere Festkörpergelenke (z. B. [7-9]). Zusätzlich zum prismatischen Festkörpergelenk mit Aussparung lassen sich verschiedenste Festkörpergelenktypen unterscheiden. Hierzu zählen u. a. das allgemeine Kreuzfedergelenk [10], prismatische Kreuzfedergelenk [11], allgemeine Trapezfedergelenk [12], kaskadierte Trapezfedergelenk [13], Speichenradgelenk [14] und Drehstabgelenk [15].

In ebenen nachgiebigen Mechanismen werden hauptsächlich prismatische Festkörpergelenke mit elementareren Aussparungsgeometrien zur Realisierung einer gewünschten einwertigen Drehbewegung verwendet. Die Optimierung der Gelenkkontur dieser vergleichsweise einfach zu fertigenden Gelenke im Hinblick auf gegensätzliche Zielkriterien wird trotz steigender Anforderungen bisher nicht systematisch erforscht. Dagegen wird in der Feinwerktechnik häufig die Drehgelenkanzahl im Mechanismus erhöht (z. B. [16, 17]), um den Auslenkwinkel einzelner Festkörpergelenke und damit die Bahnabweichung zwischen nachgiebigem Mechanismus und dem Starrkörpervorbild gering zu halten.

Ausgehend vom Modell des Starrkörpermechanismus wird bei der Gestaltung der Festkörpergelenke eine Rotation um eine gelenkfeste Drehachse angestrebt. Diesem Idealzustand lässt sich unter Einbeziehung weiterer Optimierungskriterien mit von Primitivgeometrien abweichenden Konturen näher kommen. Dank der Weiterentwicklung in der Präzisionsfertigungstechnik sind derartige Geometrien mit der notwendigen Formgüte wirtschaftlich herstellbar und rücken damit in den Fokus der Betrachtung. Es besteht ein Forschungsbedarf, da der Zusammenhang zwischen der geometrischen Gestaltung und Optimierung der Festkörpergelenke und dem sich daraus ergebenden kinematischen Verhalten des Mechanismus in der erforderlichen Auflösung bisher nicht untersucht worden ist.

Deshalb erfolgt in diesem Beitrag eine FEM-basierte Optimierung prismatischer Festkörpergelenke im nachgiebigen Mechanismus auf der Basis von neuartigen, einfach zu modellierenden und variablen Polynomkonturen (siehe [18]). Beispielhaft werden zwei ebene Mechanismen zur Realisierung einer Punktgeradführung betrachtet, die gleichschenklige zentrische Schubkurbel und der Storchschnabelmechanismus. Bei der mehrkriteriellen Optimierung werden sowohl identische Gelenkkonturen als auch die Kombination unterschiedlicher Gelenkkonturen im selben Mechanismus untersucht. Die Ergebnisse werden am Beispiel einer nachgiebigen Schubkurbel messtechnisch überprüft. Abschließend werden Gestaltungshinweise für die Synthese nachgiebiger Koppelmechanismen abgeleitet.

2 Geometrische Gestaltung der prismatischen Festkörpergelenke

Ein Festkörpergelenk lässt sich mit der variablen Gelenkhöhe $h_K(x)$ beschreiben (**Bild 3**).

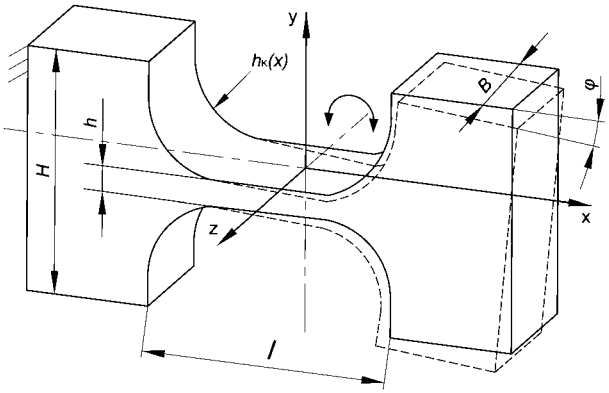


Bild 3 Geometrische Parameter des prismatischen Festkörpergelenkes mit Aussparung

Bei der geometrischen Gestaltung eines Festkörpergelenkes lassen sich zwei Teilschritte unterscheiden:

- Auslegung der grundlegenden Form der Aussparungsgeometrie,
- Dimensionierung der Gelenkparameter.

Zur Auslegung der grundlegenden Form existiert eine Vielzahl untersuchter Geometrien (**Bild 4**). In der Regel wird die Gelenkhöhe mithilfe von vordefinierten Geometrien beschrieben, wie z. B. Geraden, kreisförmigen und elliptischen Kurven oder kombinierten Elementen. Selten werden spezielle mathematische Funktionen verwendet, die infolge einer höheren Parameteranzahl feinere Formänderungen und damit einen größeren Lösungsraum ermöglichen. Polynomfunktionen mit einer höheren Ordnung als zwei werden nicht untersucht.

Während im Allgemeinen vollständig symmetrische Festkörpergelenke betrachtet werden, finden mitunter Untersuchungen von transversal- und längssymmetrischen Gelenken statt. Insbesondere für letztgenannte Gelenke ist bekannt, dass ein verbessertes kinematisches Verhalten bis hin zur vollständigen Kompensation der Drehachsenverlagerung mithilfe kleinerer Radien an der einspannungsfernen Seite erzielt werden kann [4, 19]. In diesem Beitrag werden im Sinne einer ganzheitlichen und intuitiven Synthese ausschließlich vollständig symmetrische Festkörpergelenke untersucht.

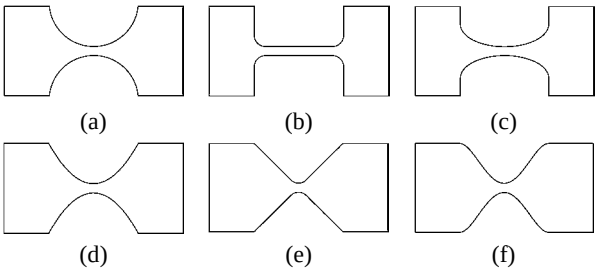


Bild 4 Bekannte Aussparungsgeometrien für Festkörpergelenke: (a) Halbkreis, (b) Viertelkreis/Verrundung, (c) Ellipse, (d) Parabel, (e) Hyperbel, (f) Zykloide

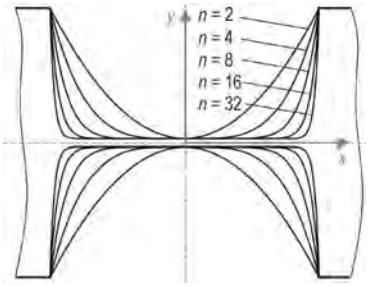


Bild 5 Darstellung des Festkörpergelenkes mit Polynomkontur unterschiedlicher Ordnung n ($l = H$ und $h = 0{,}03H$)

Für eine Optimierung bieten Polynomkonturen aufgrund der vergleichsweise einfachen Modellierung besonderes Potenzial. In Abhängigkeit von Polynomgrad und -koeffizienten lassen sich beliebig komplexe Konturen realisieren und auch elementare Geometrien approximieren. Für ein symmetrisches Festkörpergelenk mit der minimalen Gelenkhöhe h in der Gelenkmitte lässt sich die Kontur einer Gelenkhälfte für einen beliebigen ganzzahligen Polynomgrad n wie folgt ausdrücken [18]:

$$h_K(x) = \frac{h}{2} + \frac{\left(\frac{H}{2} - \frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{l}{2}\right)^n} \cdot x^n \qquad (1)$$

Hiermit ergeben sich in Abhängigkeit von n unterschiedliche Polynomkonturen (**Bild 5**). Basierend darauf haben folgende geometrische Parameter einen Einfluss auf den realisierbaren Bewegungsbereiches sowie die Bewegungspräzision des nachgiebigen Mechanismus:

- das Gelenklängenverhältnis l/H,
- das Gelenkhöhenverhältnis h/H und
- der Polynomgrad n.

Mithilfe von FEM-Simulationen verschiedener nachgiebiger Mechanismen konnte in eigenen Untersuchungen gezeigt werden, dass mit Polynomkonturen 4. Ordnung eine präzise Bewegung für einen großen Bewegungsbereich möglich ist [5]. Ferner sind generell günstige Gelenkkonturen nur bei dünnen (h/H = 0,03) Gelenken identifizierbar. Speziell bei dicken (h/H > 0,05) Gelenken können Halbkreiskonturen – die mit der Begründung einer hohen Genauigkeit in der Literatur überwiegend verwendet werden – aufgrund des multifaktoriellen Zusammenhangs der Parameter zu den größten Bahnabweichungen des nachgiebigen Mechanismen führen. Daher ist eine direkte Gelenkoptimierung im Mechanismus mit identischen und unterschiedlichen Polynomkonturen anhand der Ordnung n notwendig.

3 FEM-basierte Konturoptimierung im Mechanismus

Für die direkte Optimierung der Gelenkkontur im Mechanismus werden zwei ebene Geradführungsmechanismen mit unterschiedlicher Glied- und Drehgelenkanzahl betrachtet, die *gleichschenklige zentrische Schubkurbel* und der *Storchschnabelmechanismus* [20]. Zielkriterien sind die Bahnabweichung und die maximale Vergleichsdehnung des nachgiebigen Mechanismus bei vorgegebenem Antriebsweg an einem nicht stoffgekoppelten gestellfesten Schubgelenk. Dadurch entstehen hybride nachgiebige Mechanismen [3].

3.1 Starrkörpermechanismen

Es werden zwei Mechanismen zur Realisierung einer exakten Geradführung eines Koppelpunktes K untersucht (**Bild 6**). Neben einem Schubgelenk bestehen die Schubkurbel aus drei und der Storchschnabelmechanismus aus sechs Drehgelenken. Die Schubkurbel hat eine von Eins linear abnehmende Wegübersetzung. Für den Storchschnabel gilt der Sonderfall einer konstanten Wegübersetzung von einem Drittel.

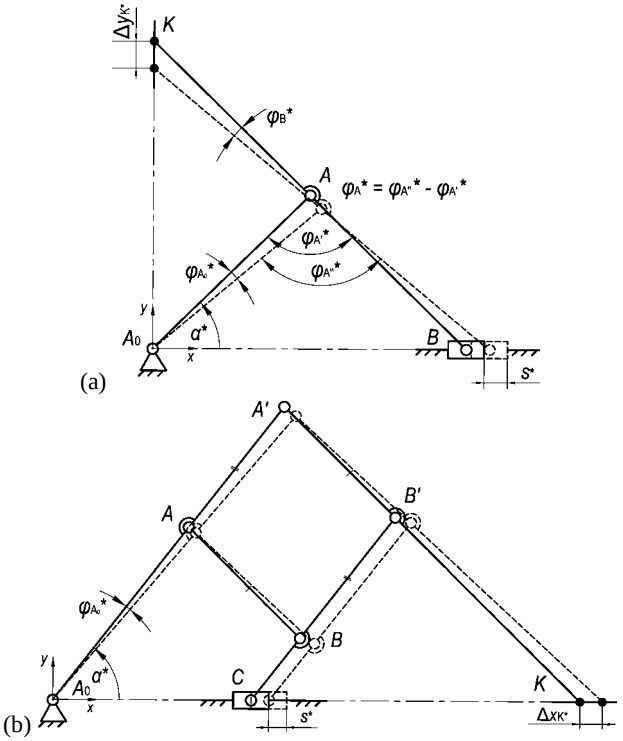


Bild 6 Untersuchte Starrkörpermechanismen (nicht maßstäblich): (a) Schubkurbel, (b) Storchschnabel [20]

Mithilfe einer kinematischen Analyse lassen sich die Drehwinkel und die Soll-Lage des Koppelpunktes für die verwendeten Gliedabmessungen, die Getriebestellung α^* und den vorgegebenen Antriebsweg s^* bestimmen (siehe **Tabelle 1** und **2**). Die Antriebswege sind so gewählt, dass sich für beide Mechanismen vergleichbare relative Winkel φ^* der Drehgelenke ergeben.

Tabelle 1 Kinematische Abmessungen, Ausgangslage und bewegungsgeometrische Größen der Schubkurbel

A_0A [mm]	AB [mm]	AK [mm]	α^* [°]	s^* [mm]	Δx_K^* [µm]	Δy_K^* [mm]	φ_{A0}^*, φ_B^* [°]	φ_A^* [°]
50	50	50	45	5	0	-5,4	4,2	8,4

Tabelle 2 Kinematische Abmessungen, Ausgangslage und bewegungsgeometrische Größen des Storchschnab.

A_0A [mm]	AB, $A'B'$, AA', BB', [mm]	$A'K$ [mm]	α^* [°]	s^* [mm]	Δx_K^* [mm]	Δy_K^* [µm]	φ_{A0}^*, φ_C^* [°]	φ_A^*, $\varphi_{A'}^*$, φ_B^*, $\varphi_{B'}^*$, [°]
60	40	120	52,9	3,8	11,4	0	5,0	8,3

3.2 Nachgiebige Mechanismen

Der Entwurf der nachgiebigen Mechanismen erfolgt basierend auf der Synthesemethode der Ersetzung der Starrkörpermechanismen in einem CAD-Modell (**Bild 7**). Dabei entsprechen die Mittelpunkte aller Festkörpergelenke den Koordinaten der Drehgelenkpunkte des jeweiligen Starrkörpermechanismus.

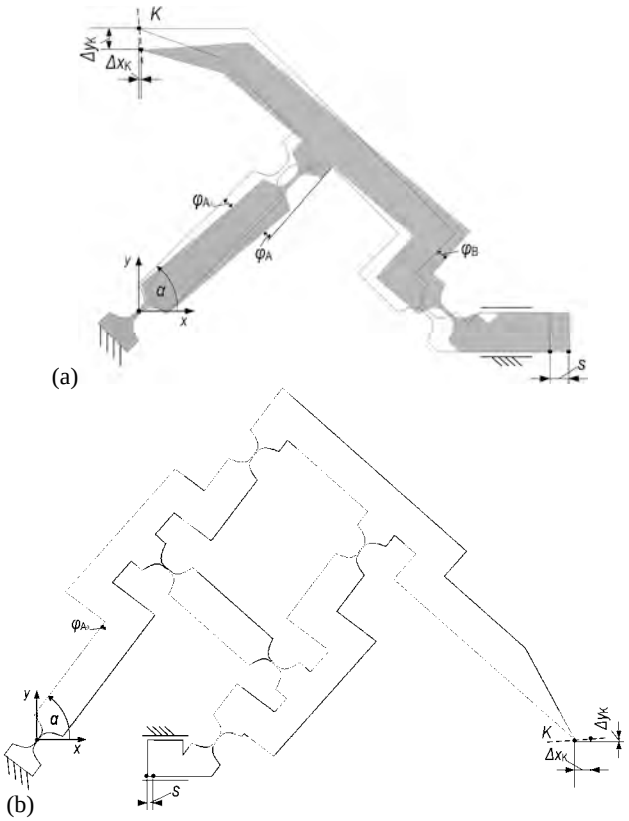


Bild 7 Untersuchte nachgiebige Mechanismen mit Polynomkontur 4. Ordnung (Darstellung der unausgelenkten und ausgelenkten Lage): (a) Schubkurbel, (b) Storchschnabel [20]

Da die Getriebestellung α^* Einfluss auf die Führungsabweichung hat, wird in der Literatur für die Ausgangslage $\alpha = \alpha^*$ der Schubkurbel ein günstiger Bereich von 20° bis 45° vorgeschlagen [21]. Ein weiterer Parameter, der bei der konstruktiven Umsetzung entsteht, ist die Gelenkorientierung. Diese wird für die Festkörpergelenke A_0 und A so gewählt, dass die Längsachsen der Festkörpergelenke parallel zur Kurbel sind. Bei den übrigen Gelenken ist die Belastung im Mechanismus so zu berücksichtigen, dass Biegebeanspruchung überwiegt.

Der Einfluss der Variation der Gelenkkontur und der -abmessungen auf die Mechanismuseigenschaften wird mittels FEM-Simulationen untersucht. Nach Vorgabe des Antriebsweges $s = s^*$ können neben der Maximaldehnung die Geradführungslänge und die Geradenabweichung ausgewertet werden. Damit ergibt sich die Ist-Lage des Punktes *K* des nachgiebigen Mechanismus.

3.3 Mehrkriterielle Konturoptimierung

Für die FEM-basierte Konturoptimierung der nachgiebigen Mechanismen mit Polynomkonturen wird jedes enthaltene Festkörpergelenk mit identischem bzw. unterschiedlichem Polynomgrad *n* modelliert. Als Vergleich dienen nachgiebige Mechanismen mit identischen Gelenken auf der Basis von häufig verwendeten Halbkreiskonturen, Ellipsenkonturen sowie Viertelkreiskonturen mit dehnungsgünstigem Rundungsradius.

Das Simulationsmodell wird mit der Software *ANSYS Workbench 14.5* erstellt. Für die Optimierung wird das integrierte Tool *optiSLang inside ANSYS Workbench* auf Basis einer vollständigen Variantenstudie verwendet. Die mehrkriterielle Optimierung findet für folgende Parametervariation und Zielkriterien statt:

- *Variation des Polynomgrades* von $n = 2$ bis $n = 32$ mit der Schrittweite 2 (diese wird gewählt, da geradzahlige *n* eine unmittelbare Erstellung einer Gelenkhälfte im CAD-Modell ermöglichen),
- *Minimierung der Geradenabweichung* Δx_K bzw. Δy_K des Koppelpunktes *K* und
- *Minimierung der maximalen Vergleichsdehnung* ε_V des Mechanismus.

Die Optimierungsergebnisse sind in **Tabelle 3** und **4** beispielhaft für eine konstante Gliedhöhe $H = 10$ mm, Breite $B = 6$ mm sowie die diskret vorgegebenen Gelenkabmessungen $l = H$ und $h = 0{,}03H$ dargestellt. Weitere Ergebnisse für andere Gelenkabmessungen *l* und *h* sind für die Schubkurbel in [20] zu finden. Als Werkstoff wird das hochfeste Aluminium EN AW 7075 mit der zulässigen Dehnung $\varepsilon_{zul} = 0{,}5$ % gewählt.

Tabelle 3 Optimale Polynomgrade und Ergebnisgrößen der nachgiebigen Schubkurbel im Vergleich mit Standardkonturen für $s = 5$ mm ($l = H$, $h = 0{,}03H$) [20]

Gelenkkontur	Festkörpergelenk			Δx_K [µm]	ε_V [%]
	A_0	A	B		
Halbkreiskonturen	$R = l/2$			10,3	1,58
Ellipsenkonturen	$R_1 = 2R_2 = l/2$			13,4	1,18
Viertelkreiskonturen	$R = l/10$ [4]			44,7	0,30
Optimierung mit identischen Polynomkonturen (Gl. 1)	$n = 4$	$n = 4$	$n = 4$	14,3	0,83
Optimierung mit unterschiedlichen Polynomk.(Gl. 1)	$n = 4$	$n = 8$	$n = 4$	19,1	0,46

Tabelle 4 Optimale Polynomgrade und Ergebnisgrößen des nachgiebigen Storchschnabels im Vergleich mit Standardkonturen für $s = 3{,}8$ mm ($l = H$, $h = 0{,}03H$) [20]; um den Parameterraum zu begrenzen, werden für die sechs Drehgelenke vier verschiedene Parameter verwendet.

Gelenkkontur	Festkörpergelenk				Δy_K [µm]	ε_V [%]
	A_0	A, B	A', B'	C		
Halbkreiskonturen	$R = l/2$				246	1,62
Ellipsenkonturen	$R_1 = 2R_2 = l/2$				287	1,16
Viertelkreiskonturen	$R = l/10$ [4]				956	0,40
Optimierung mit identischen Polynomk. (Gl. 1)	$n = 4$	$n = 4$	$n = 4$	$n = 4$	422	0,51
Optimierung mit unterschiedl. Polynomk.(Gl. 1)	$n = 4$	$n = 10$	$n = 8$	$n = 4$	276	0,82

Mit allen fünf aufgeführten nachgiebigen Schubkurbeln (Tabelle 3) lässt sich für den angegebenen Bewegungsbereich eine angenäherte Geradführung mit einer Abweichung im zweistelligen Mikrometerbereich realisieren. Aufgrund des größeren Abtriebsweges und der geringeren Wegübersetzung ist der Absolutwert der Geradenabweichung beim nachgiebigen Storchschnabel (Tabelle 4) trotz vergleichbarer Auslenkwinkel höher als bei der Schubkurbel. Für den ungünstigsten Fall der Viertelkreiskontur liegt die Geradenabweichung hier im Millimeterbereich.

Im Vergleich zu den Standardkonturen sind optimierte Polynomkonturen 4. Ordnung zur gleichzeitigen Reduzierung der beiden Zielkriterien Geradenabweichung und Maximaldehnung geeignet. Die Verwendung von Festkörpergelenken mit optimierten Polynomkonturen unterschiedlicher Ordnung ermöglicht eine weitere Verbesserung der Gestaltungsziele. Des Weiteren lässt sich für die Minimierung beider Zielkriterien feststellen, dass der optimale Polynomgrad bei unterschiedlichen Festkörpergelenken vom Auslenkwinkel φ und damit vom Drehwinkel φ^* bestimmt wird. Je größer φ^* ist, desto größer ist der optimale Polynomgrad des jeweiligen Festkörpergelenkes.

4 Messtechnische Untersuchung der Geradenabweichung

Die experimentelle Verifikation der FEM-Ergebnisse erfolgt am Beispiel der Schubkurbel (**Bild 8**).

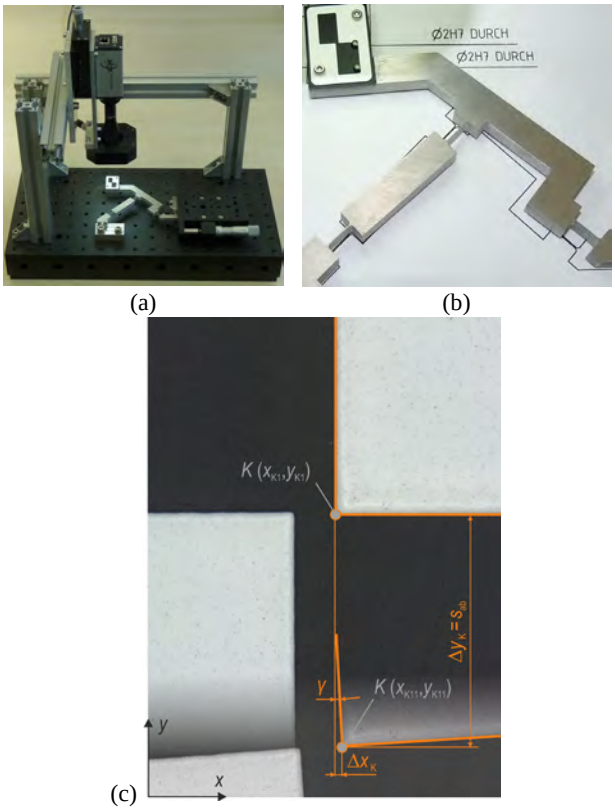


Bild 8 Messtechnische Untersuchung der Koppelpunktbahn der Schubkurbel: (a) Messaufbau, (b) ausgelenkter Mechanismus, (c) kamerabasierte Bildauswertung mittels Marke (Bildüberlagerung zweier Lagen) [20]

Zur Untersuchung der Geradenabweichung Δx_K wird die Bahnkurve des Punktes *K* mithilfe einer CCD-Kamera mit telezentrischem Objektiv erfasst. Der Punkt *K* wird dabei durch eine speziell gestaltete Messmarke definiert. Anschließend wird Δx_K computergestützt mittels *MATLAB* ausgewertet (siehe [20]). Um Verformungseinflüsse auf die Drehachsenverlagerung einzelner Festkörpergelenke zu minimieren, wird der Mechanismus liegend vermessen, sodass die Gelenkdrehachsen parallel zur Wirkungslinie der Schwerkraft sind. Die Vorgabe der linearen Antriebsbewegung erfolgt mittels Messschraube eines mit dem Schubglied verbundenen Messtisches.

Die messtechnische Untersuchung findet an drei mittels Drahterosion gefertigten nachgiebigen Schubkurbeln statt (**Bild 9**). Für die Schubkurbel mit optimierten Polynomkonturen wird im Hinblick auf die Realisierung einer genaueren Geradführung die Variante mit identischen Polynomkonturen 4. Ordnung gewählt. Als Vergleich dienen eine Schubkurbel mit Halbkreis- und eine Schubkurbel mit Viertelkreiskonturen (Tabelle 3).

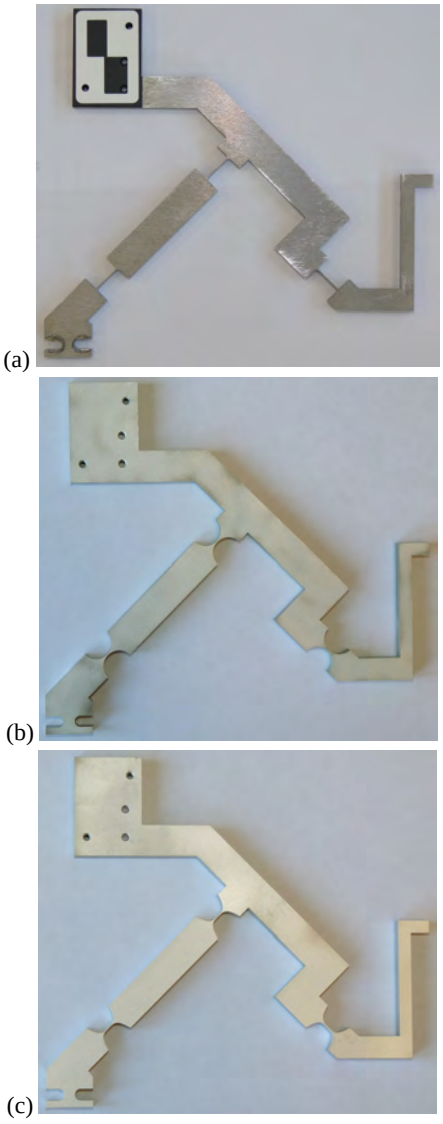


Bild 9 Untersuchte nachgiebige Schubkurbeln mit: (a) Viertelkreiskonturen, (b) Halbkreiskonturen, (c) Polynomkonturen 4. Ordnung [20]

5 Ergebnisse und Diskussion

In **Bild 10** sind die FEM- und Messergebnisse zur Koppelpunktbahn der drei nachgiebigen Schubkurbeln für den vorgesehenen Antriebsweg von s = 5 mm in Lastschritten von 0,5 mm dargestellt. Die Simulation erfolgte dabei mit der zusätzlichen Randbedingung der Schwerkraft, um diesen Einfluss auf das Bewegungsverhalten im FEM-Modell zu berücksichtigen. Unter Beachtung der zulässigen Dehnung ergeben sich für die messtechnische Untersuchung entsprechend der von der Gelenkkontur abhängigen Maximaldehnung unterschiedliche maximale Antriebswege der gefertigten nachgiebigen Schubkurbeln.

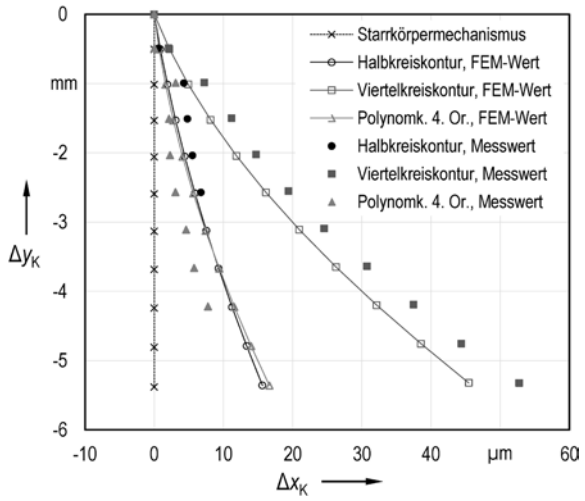


Bild 10 FEM- und Messergebnisse der Koppelpunktbahn der nachgiebigen Schubkurbeln im Vergleich zur exakten Geradführung des Starrkörpermechanismus [20]

Die FEM-Ergebnisse zum qualitativen Einfluss der Festkörpergelenkkontur auf die Geradenabweichung Δx_K werden durch die Messergebnisse bestätigt. Dies betrifft sowohl den nichtlinearen Kurvenverlauf, als auch den Unterschied zwischen den drei Mechanismen mit verschiedenen Gelenkkonturen. Viertelkreiskonturen führen zur größten Geradenabweichung, während im betrachteten Fall mittels Halbkreis- und Polynomkonturen 4. Ordnung in untereinander vergleichbarem Maße eine bessere Geradführung realisierbar ist.

Bei der Messung auftretende Messunsicherheiten resultieren durch die Montage der Marke und insbesondere durch die Einspannung des Drehgelenkes A_0 im Versuchsstand. Dennoch wird die konturabhängige Größenordnung der Geradenabweichung im Mikrometerbereich auch mit Einbeziehung der erweiterten Messunsicherheit bestätigt [20]. Im Leerlauffall lässt sich mit der nachgiebigen Schubkurbel mit optimierten Polynomkonturen, verglichen mit der exakten Geradführung des Starrkörpermechanismus, somit eine angenäherte Geradführung mit geringer Bahnabweichung realisieren.

Um den Einfluss einer abtriebsseitigen, am betrachteten Koppelpunkt K wirkenden Gegenkraft auf die Geradenabweichung zu bestimmen, wird für die optimierte Schubkurbel eine zusätzliche Kraft F_K in positive x- oder y-Richtung eingeführt. Die Gegenkräfte werden bis

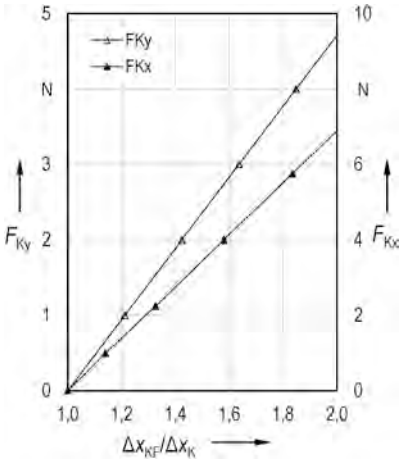


Bild 11 FEM-Analyse der Geradenabweichung der optimierten Schubkurbel (s. Bild 9c) bei Gegenkraft am Koppelpunkt (s = 5 mm, F_{an} = 2,1 N, Δx_K = 14,3 µm) [20]

zu einer Verdopplung der relativen Geradenabweichung untersucht (**Bild 11**). Dabei ergeben sich bezogen auf die notwendige Antriebskraft am Schubglied je nach Kraftrichtung deutlich höhere zulässige Gegenkräfte im Bereich bis 10 N. Auch mit den untersuchten Gegenkräften ist eine akzeptable Geradenabweichung kleiner als 30 µm realisierbar. Zusätzlich kann infolge des für den betrachteten Kraftbereich linearen Verhaltens bei der Anwendung der nachgiebigen Schubkurbel – unter der Voraussetzung bekannter Kräfte – eine Korrektur der Geradenabweichung erfolgen. Darüber hinaus lässt sich für die Schubkurbel mit einer Gegenkraft in negative x-Richtung eine teilweise oder u. U. sogar vollständige Fehlerkompensation und damit eine exakte Geradführung erreichen [20].

Zusammenfassend wird anhand der messtechnischen Untersuchung der Geradenabweichung des Koppelpunktes von drei nachgiebigen Schubkurbeln mit Viertelkreis-, Halbkreis- und Polynomkonturen 4. Ordnung die grundsätzliche Eignung von Polynomkonturen für die FEM-basierte Optimierung nachgewiesen.

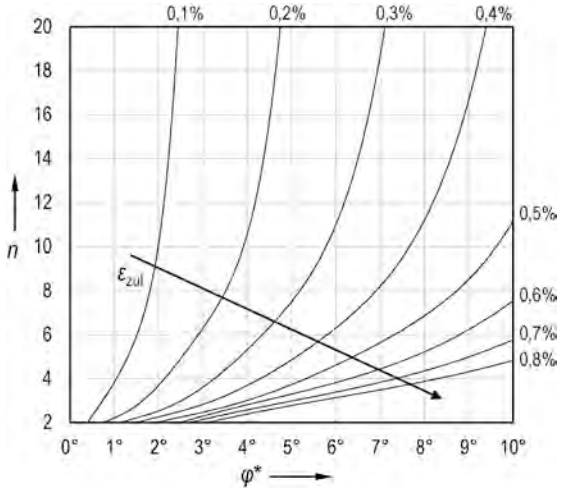


Bild 12 Kurventafel zur Bestimmung des minimalen Polynomgrades n abhängig vom Drehwinkel φ^* im Starrkörpermechanismus und der zulässigen Dehnung ε_{zul} bei der Verwendung unterschiedlicher Gelenke im nachgiebigen Mechanismus ($l = H$ und $h = 0{,}03H$) [20]

Im Hinblick auf die Synthese nachgiebiger Koppelmechanismen mit unterschiedlichen Gelenken lässt sich schlussfolgern, dass der Auslenkwinkel jedes Festkörpergelenkes zur Auswahl eines geeigneten Polynomgrades verwendbar ist (**Bild 12**). Somit ergeben sich unter Beachtung der Gelenkabmessungen vereinfachte Gestaltungshinweise für prismatische Festkörpergelenke. Dies stellt einen neuen und weiter zu untersuchenden Ansatz für die Mechanismussynthese dar.

6 Zusammenfassung

Eine wesentliche Phase bei der Synthese eines nachgiebigen Koppelmechanismus für Präzisionsanwendungen ist die in diesem Beitrag untersuchte geometrische Gestaltung und Optimierung prismatischer Festkörpergelenke hinsichtlich geforderter Mechanismuseigenschaften. Hierzu wurden der Bewegungsbereich und die Bahngenauigkeit im Vergleich mit dem zugrunde liegenden Starrkörpermechanismus betrachtet.

Neben der konturunabhängigen Gelenklänge und minimalen Gelenkhöhe hat insbesondere die Festkörpergelenkkontur einen Einfluss auf das Bewegungs- und Dehnungsverhalten der beiden untersuchten nachgiebigen Punktgeradführungsmechanismen. Es existiert ein mehrkriterielles Optimierungsproblem, wobei die direkte Optimierung der Gelenkkontur im Mechanismus mit unterschiedlichen Polynomkonturen zweckmäßig ist. Für die Verwendung identischer Gelenke hat sich bestätigt, dass Polynomkonturen 4. Ordnung hinsichtlich Bewegungsbereich und Bahngenauigkeit besonders geeignet sind. Die Optimierungsergebnisse werden anhand der messtechnischen Untersuchung von verschiedenen nachgiebigen Schubkurbeln bestätigt.

Im Vergleich zur computergestützten Optimierung der Gelenkkontur lassen sich die gewünschten Mechanismuseigenschaften auch durch vereinfachte Gestaltung mittels einer erstellten Kurventafel realisieren. Da sich die Gelenkdrehwinkel vorteilhaft durch eine kinematische Analyse des Starrkörpermechanismus bestimmen lassen, bieten Kurventafeln besonderes Anwendungspotenzial für die Mechanismussynthese.

7 Danksagung

Die Autoren bedanken sich bei der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die finanzielle Förderung im Rahmen des Gemeinschaftsprojektes mit den Geschäftszeichen ZE 714/10-1 und TH 845/5-1.

8 Literatur

[1] Howell, L. L.; Magleby, S. P.; Olsen, B. M.: *Handbook of Compliant Mechanisms.* Chichester: Wiley, 2013

[2] Lobontiu, N.: *Compliant Mechanisms: Design of Flexure Hinges.* Boca Raton, Fla.: CRC Press, 2003

[3] Zentner, L.: *Nachgiebige Mechanismen.* München: De Gruyter Oldenbourg, 2014

[4] Linß, S.; Erbe, T.; Theska, R.; Zentner, L.: The influence of asymmetric flexure hinges on the axis of rotation. In: *Proceedings of the 56th International Scientific Colloquium*, 2011

[5] Linß, S.; Zentner, L.: Einfluss der Festkörpergelenkkontur auf die Bewegungsgenauigkeit und die Gestaltfestigkeit nachgiebiger Koppelmechanismen. In: Zentner, L. (Hrsg.): *10. Kolloquium Getriebetechnik.* Ilmenau: Universitätsverlag Ilmenau, 2013, S. 355-372

[6] Erbe, T.: *Beitrag zur systematischen Aktor- und Aktorprinzipauswahl im Entwicklungsprozess.* Ilmenau, TU Ilmenau, Diss., 2013

[7] Martin, J.; Robert, M.: *Novel Flexible Pivot with Large Angular Range and Small Center Shift to be Integrated into a Bio-Inspired Robotic Hand.* In: *Journal of intelligent material systems and structures* 22 (2011), Nr. 13, S. 1431-1438

[8] Fowler, R. M.; Magleby, S. P.; Howell, L. L.: Flex-16: A monolithic large-displacement compliant rotational hinge. In: *Proceedings of IDETC/CIE 2012*, 2012

[9] Lobontiu, N.: *Compliance-based modeling and design of straight-axis/circular-axis flexible hinges with small out-of-plane deformations.* In: *Mechanism and Machine Theory* 80 (2014), S. 166-183

[10] Jensen, B. D.; Howell, L. L.: *The modeling of cross-axis flexural pivots.* In: *Mechanism and Machine Theory* 37 (2002), Nr. 5, S. 461–476

[11] Bi, S.; Zhao, H.; Yu, J.: *Modeling of a Cartwheel Flexural Pivot.* In: *Journal of mechanical design* 131 (2009), Nr. 6

[12] Pei, X.; Yu, J.; Zong, G.; Bi, S.; Yu, Z.: *Analysis of Rotational Precision for an Isosceles-Trapezoidal Flexural Pivot.* In: *Journal of mechanical design* 130 (2008), Nr. 5, S. 052302-1-9

[13] Henein, S.; Spanoudakis, P.; Droz, S.; Myklebust, L. I.; Onillon, E.: Flexure pivot for aerospace mechanisms. In: *Proceedings of the 10th European Space Mechanisms and Tribology Symposium*, 2003

[14] Bi, S.; Zhao, S.; Zhu X.: *Dimensionless design graphs for three types of annulus-shaped flexure hinges.* In: *Precision Engineering* 34 (2010), Nr. 3, S. 659–667

[15] Trease, B. P.; Moon, Y.-M.; Kota, S.: *Design of Large-Displacement Compliant Joints.* In: *Journal of mechanical design* 127 (2005), Nr. 4, S. 788–798

[16] Beroz, J.; Awtar, S.; Bedewy, M.; Tawfick S.; Hart A. J.: Compliant microgripper with parallel straight-line jaw trajectory for nanostructure manipulation. In: *Proceedings of the 26th Annual Meeting of the American Society for Precision Engineering*, 2011

[17] Cosandier, F.; Eichenberger, A.; Baumann, H.; Jeckelmann, B.; Bonny, M.; Chatagny, V.; Clavel, R.: *Development and integration of high straightness flexure guiding mechanisms dedicated to the METAS watt balance Mark II.* In: *Metrologia* 51 (2014), Nr. 2, S. 88-95

[18] Linß, S.; Erbe, T.; Zentner, L.: On polynomial flexure hinges for increased deflection and an approach for simplified manufacturing. In: *Proceedings of the 13th World Congress in Mechanism and Machine Science*, 2011, S. A11_512

[19] Lin, R.; Zhang, X.; Long, X.; Fatikow, S.: *Hybrid flexure hinges.* In: *Review of Scientific Instruments* 84 (2013), Nr. 8, S. 085004-1-14

[20] Linß, S.: *Ein Beitrag zur geometrischen Gestaltung und Optimierung prismatischer Festkörpergelenke in nachgiebigen Koppelmechanismen.* Ilmenau, eingereicht (TU Ilmenau), Diss., 2014

[21] Pavlovic, N. T.; Pavlovic, N. D.; Milosevic, M.: Design of compliant slider - crank mechanism. In: *Proceedings of the 56th International Scientific Colloquium*, 2011